Вступительный экзамен в аспирантуру НМУ

28 апреля 1997 года

1. Опишите поверхность тела, получаемого вращением трехмерного куба вокруг его главной диагонали.

2. Пусть A — вещественная квадратная матрица. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1) среди собственных чисел матрицы A нет положительных;
2) существует нетривиальный полином f с неотрицательными коэффициентами, для которого $f(A) = 0$.

3. Докажите, что всякая группа порядка, большего 2, имеет нетривиальный автоморфизм.

4. Вычислите площадь поверхности единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

5. Частица, блуждающая по целым точкам полуоси $x \geqslant 0$, с вероятностью a сдвигается на 1 вправо, с вероятностью b — на 1 влево, в остальных случаях остается на месте (если $x = 0$, то вместо сдвига влево частица остается на месте). Определите установившееся распределение вероятностей, а также математическое ожидание величин x и x^2 через большое время, если изначально частица находилась в точке 0.

6. Пусть $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ — двумерное комплексное проективное пространство. Опишите структуру кольца когомологий де Рама $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^2)$.

7. Нарисуйте график функции $y(t)$, для которой $\dot{y}(t) = 1 + \sin^2 y(t)$, $t \geqslant 0$ и $y(0) = 0$.

8. Пусть $P \to M$ — комплексное накрытие комплексной кривой M, причем кривая P односвязна. Что представляет собой кривая P, если кривая M есть

- сфера $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ без трех точек;
- сфера $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ без четырех точек?

Предъявите соответствующие накрытия.

9. Найдите

$$\min \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi^2(x)\, dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi'(x))^2\, dx \right),$$

где минимум берется по всем вещественным функциям $\varphi(x)$, удовлетворяющим свойству $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x)dx = 1$.

10. На пространстве векторных полей, касательных к единичной сфере в $\mathbb{R}^3$, определена операция J — поворот на $90°$ (задаваемая векторным произведением с ортонормальным векторным полем). Докажите, что любое касательное векторное поле на сфере можно единственным образом представить в виде суммы $v_1 + v_2$, где v_1 — градиентное векторное поле, а v_2 есть результат применения операции J к градиентному векторному полю.