Вступительный экзамен в аспирантуру НМУ

26 октября 1998 года

1. Найдите максимальное число вершин многоугольника в пересечении n-мерного куба и двумерной плоскости.

2. Решите уравнение $\ddot{x} = x^5 + x^2\dot{x}$.

3. Вычислите углы треугольника в $L_2(-1,1)$, образованного точками $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x$.

4. Найдите сумму ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$.

5. Укажите в пространстве $2n \times 2n$-матриц подпространство размерности n^2+1, состоящее из попарно перестановочных матриц.

6. Пусть $F(x,y) = x^2y^2(x^2+y^2-3)+1$.

- Докажите, что этот многочлен неотрицателен.
- Найдите его представление в виде суммы квадратов рациональных функций.
- Докажите, что его нельзя представить в виде суммы квадратов вещественных многочленов.

7. Пусть $A\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ — линейный оператор, такой что его ядро $\operatorname{Ker} A \subset \mathcal{C}_1$ и его коядро $\operatorname{Coker} A = \mathcal{C}_2 / \operatorname{Im} A$ конечномерны. Индексом оператора называется разность $\dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A$. Докажите, что ядро и коядро операторов рождения и уничтожения $A_\pm(f) = \left(\frac{d}{dx} \pm x\right) f$, действующих на пространстве функций вида $f(x) = p(x)e^{-x^2/2}$, где $p(x)$ — многочлен, конечномерны. Найдите их индексы.

8. Пусть $P_\varepsilon(x)$ — семейство многочленов от одной переменной, полиномиально зависящее от параметра ε. Пусть $x_1 = x_1(\varepsilon)$, $x_2 = x_2(\varepsilon)$ — два корня производной этого многочлена, $P'_\varepsilon(x_1) = P'_\varepsilon(x_2) = 0$, непрерывно стремящиеся к общему пределу x_0 при $\varepsilon \to 0$ и такие что $P_\varepsilon(x_1(\varepsilon)) \equiv P_\varepsilon(x_2(\varepsilon))$. Докажите, что есть третий корень $x_3(\varepsilon)$ производной $P'_\varepsilon(x)$, непрерывно стремящийся к тому же значению x_0 при $\varepsilon \to 0$

- в вещественном случае, $x, \varepsilon \in \mathbb{R}$;
- в комплексном случае, $x, \varepsilon \in \mathbb{C}$.

9. Найдите

$$\inf \int\int_{x^2+y^2 \leqslant 1} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx\, dy$$

по C^∞-функциям u, равным 0 в 0 и 1 при $x^2 + y^2 = 1$.

10. Вычислите целочисленные когомологии расслоения единичных касательных векторов над сферой с двумя ручками. Опишите структуру кольца в них.