# Вступительный экзамен в аспирантуру НМУ

## 16 ноября 1999 года

1. В какой из ям (более глубокой или более мелкой) потенциальной энергии уравнения
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3x - x^3 - 1$$
больше период колебаний при равных значениях полной энергии?

2. На плоскости дана прямая, на которой отмечены две тройки точек $p_1$, $p_2$, $p_3$ и $q_1$, $q_2$, $q_3$. С помощью линейки постройте образ произвольной точки $t$ прямой при дробно-линейном преобразовании, переводящем каждую из точек $p_i$ в $q_i$.

3. Найдите длину окружности и площадь круга радиуса $r$ на плоскости Лобачевского постоянной кривизны $-1$.

4.Чему равно произведение попарных разностей корней степени $n$ из 1?

5. Докажите, что всякая квадратная матрица приводится к блочно-диагональному виду, где по диагонали стоят *циклические блоки*
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \end{pmatrix}.$$
Найдите характеристический и минимальный многочлен такого блока.

6. Сопоставим $2 \times 4$-матрице (неупорядоченный) набор значений ее миноров порядка 2. Может ли для комплексной матрицы этот набор иметь вид а) $\{2,3,4,5,6,7\}$; б) $\{3,4,5,6,7,8\}$?

7. Докажите, что вещественную проективную плоскость нельзя вложить в вещественное трехмерное пространство.

8. Пусть $p$ — многочлен от $n$ комплексных переменных. Будем говорить, что рациональная дифференциальная $k$-форма $\omega$ на $\mathbb{C}^n$ является $p$-логарифмической, если обе формы $p\omega$ и $pd\omega$ голоморфны (т. е. не имеют полюсов).

а) Докажите, что $p$-логарифмические формы для данного $p$ образуют комплекс относительно дифференциала $d$;

б) Найдите когомологии этого комплекса для случая, когда $n = 1$, $p(x) = x^2 - 1$.

10. Один из игроков прячет монету в 10 или 20 копеек; другой отгадывает, какая монета спрятана. Отгадавший получает монету, не отгадавший платит 15 копеек. Честная ли это игра? Каковы оптимальные стратегии обоих участников?