Программа «Лиценциат»

(14 декабря 2006 г.)

Первый семестр

Анализ – 1

- Множества: теорема Кантора – Бернштейна; неограниченность роста кардинальных чисел; лемма Цорна (или эквивалентное ей представление о трансфинитной индукции).
- Полнота $\mathbb{R}$; топология $\mathbb{R}^n$, свойства компактов и непрерывных функций на компактах.
- Метрические пространства: теорема о неподвижной точке сжимающего отображения; теорема о пополнении; полнота пространства ограниченных непрерывных функций.
- Интеграл от кусочно непрерывной функции одного переменного и формула Ньютона – Лейбница.
- Канторово множество гомеоморфно $\mathbb{Z}_p$.
- Разложение в степенные ряды: формула Тейлора для функций одного переменного; область сходимости степенного ряда; разложение элементарных функций.

Геометрия – 1

- Векторные пространства: построение базиса; двойственность.
- Ориентированный объём, полилинейные косые формы и определители.
- Евклидова геометрия в $\mathbb{R}^n$: ортогональное проектирование; вычисление углов; квадрат объёма равен определителю Грама.
- Словарик «линейная алгебра – проективная геометрия»; топология $\mathbb{RP}_1$, $\mathbb{RP}_2$, $\mathbb{RP}_3 = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ и $\mathbb{CP}_1$; проективная инвариантность двойного отношения.
- Аффинная геометрия в $\mathbb{R}^n$: замкнутая выпуклая фигура является пересечением опорных полупространств; теорема Минковского – Вейля[1].
- Геометрия Лобачевского: модели Клейна и Пуанкаре; вычисление длин и площадей; группа изометрий; фундаментальная область модулярной группы.

Алгебра – 1

- Комбинаторика: мультиномиальные коэффициенты; подсчёт числа отображений[2] между конечными (упорядоченными) множествами.
- Поле $\mathbb{C}$, кольца $\mathbb{Z}/(n)$ (вычеты) и $\mathbb{Q}[x]/(f)$ (алгебраические числа); характеристика поля, гомоморфизм Фробениуса.

[1] выпуклая оболочка конечного набора точек является компактным пересечением конечного числа полупространств и наоборот

[2] инъективных, сюрьективных, монотонных и т. п.

- Матричная алгебра; строчный ранг матрицы равен столбцовому; отыскание собственных векторов линейных отображений.
- Группы: действие на множестве, длина орбиты; $G/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi$; группы многогранников и симметрические группы, простота A_5 и разрешимость A_3 и A_4.
- Делимость: китайская теорема об остатках[3]; K евклидово $\Longrightarrow$ K область главных идеалов $\Longrightarrow$ K факториально $\Longrightarrow$ $K[x]$ факториально.
- Грассманова алгебра: $\Lambda^k F \cdot \Lambda^{n-k} F^t = \det F \cdot E$ для $n \times n$-матрицы[4] F; теорема Гамильтона-Кэли (над любым коммутативным кольцом); стандартный вид кососимметричной формы (над любым полем), пфаффиан.
- Стандартные базисы пространства симметрических многочленов[5] и переходы между ними; результант и дискриминант.

Второй семестр

Анализ – 2 (локальный анализ многих переменных)

- Дифференциал функции и многомерная формула Тейлора.
- Теоремы о неявном и обратном отображениях.
- Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и его зависимости от начальных условий.
- Множества меры нуль и нигде не плотные множества. Лемма Сарда.
- Теорема трансверсальности Тома.

Алгебра – 2 (линейная алгебра и геометрия)

- Строение конечно порождённых модулей над евклидовым кольцом, конечно порождённых абелевых групп и конечномерных $\Bbbk[x]$-модулей.
- Жорданова нормальная форма матрицы («теорема об элементарных делителях»); вычисление функций от матриц (полиномиальная интерполяция).
- Квадратичные формы (над любым полем): ортогонализация; ортогональная группа порождается отражениями; отыскание сигнатуры вещественных форм.
- Эрмитовы формы: неравенство $|(a,b)| \le ||a|| \cdot ||b||$; продолжения симплектической структуры на $\mathbb{R}^{2n}$ до эрмитовой образуют зигелево полупространство.
- Спектральная теорема для нормальных операторов, её специализации для евклидово и эрмитово (анти) самосопряжённых и изометрических операторов; полярное разложение.

---

[3] $K/(\cap I_\nu) = \oplus(K/I_\nu)$, если идеалы I_ν в коммутативном кольце K таковы, что $1 \in I_\nu + I_\mu \ \forall \mu,\nu$

[4] $\Lambda^k F$ — это $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$ матрица, составленная из всевозможных $k \times k$-миноров матрицы F

[5] полные и элементарные симметрические функции, полиномы Ньютона и Шура

- Тензорная алгебра векторного пространства; отыскание линейного носителя данного тензора[6], многообразия Сегре, Грассмана и Веронезе; поляризация коммутативных и грассмановых многочленов (в нулевой характеристике).

- Кватернионы; двулистные накрытия $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$; расслоение Хопфа $\mathrm{SU}_2 = S^3 \to S^2$.

Топология – 1 (наглядная топология, гомотопии и понятие многообразия)

- Степень отображения окружности в окружность и ее приложения: теорема Брауэра для двумерного диска, алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$.

- Классификация двумерных поверхностей (триангулируемый случай). Векторные поля на двумерных поверхностях: индексы особых точек и теорема Эйлера-Пуанкаре.

- Приёмы вычисления фундаментальных групп: накрытия, представление в виде комплекса. Задание групп образующими и соотношениями и теорема Зейферта – Ван-Кампена. Классификация накрытий с помощью фундаментальной группы.

- Определение гладкого многообразия. Разбиение единицы. Гладкая (или PL-) аппроксимация. Существование римановой метрики. Вложимость в евклидово пространство.

- Степень отображения многообразия в многообразие и ее приложения: теорема Брауэра для n-мерного диска, несуществование ненулевых касательных векторных полей на чётномерных сферах.

Третий семестр

Анализ – 3 (анализ на многообразиях)

- Теорема о локальном экстремуме ограничения функции на подмногообразие (условный экстремум и множители Лагранжа).

- Лемма Морса, функции Морса плотны в пространстве дифференцируемых функций.

- Векторные поля и их интегральные траектории; производные Ли тензорных полей, $L_X = d \circ \imath_X + \imath_X \circ d$; теорема Фробениуса об интегрируемости распределения m-плоскостей.

- Формула Стокса на гладком многообразии и ее специализации в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

- Комплекс Де Рама и теорема Де Рама (без доказательства).

Топология – 2 (теория гомологий)

- Простейшие мотивирующие приложения групп гомологий, такие как препятствие w_1 к ориентируемости многообразия, или классификация двулистных накрытий над многообразием, или препятствие w_2 к построению тройки ортонормированных касательных векторных полей на трёхмерном многообразии.

[6] т. е. наименьшего векторного подпространства $W \subset V$, такого что заданный тензор лежит в $\mathbb{T}(W)$

- Симплициальные гомологии, теорема инвариантности (без доказательства). Простейшие методы вычисления гомологий (вырезание, гомологии пары, точные последовательности пары и Майера – Виеториса).

- Форма пересечений на гомологиях (триангулированных) гладких многообразий. Двойственность Пуанкаре на (неориентированных) гладких многообразиях. Индекс зацепления многообразий в S^n. Двойственность Александера.

- Комплекс Морса и его гомологии.

Алгебра – 3 («алгебра стрелок» и представления)

- Диаграмный поиск, длинная точная последовательность гомологий; точность дифференциалов Кошуля и Де Рама на $S(V) \otimes \Lambda(V)$.

- Описание конечномерных неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей.

- Представления конечных групп: полная приводимость; ортогональность неприводимых характеров; размерности неприводимых представлений делят $|G|$, равный сумме их квадратов; неприводимые представления симметрической группы.

- Полупростые модули над ассоциативными алгебрами: теорема плотности[7], теорема Бернсайда[8].

- Естественные преобразования функторов и эквивалентности категорий; сопряжённые функторы; лемма Ионеды, представимые функторы и задание объектов универсальными свойствами.

Четвёртый семестр

Комплексный анализ

- Эквивалентность трех определений голоморфности (дифференцируемость, аналитичность, равенство нулю контурного интеграла).

- Интегральная формула Коши для рядов Лорана, вычеты; теорема Сохоцкого; принцип аргумента.

- Критерий однолистности, предел однолистных функций.

- Аналитическое продолжение: принцип симметрии, принцип непрерывности.

- Теорема Римана об отображении односвязных областей.

- Римановы поверхности, формула Римана – Гурвица.

Дифференциальная геометрия

[7] для точного полупростого A-модуля M, если $B = \mathrm{End}_A(M)$, то $A = \mathrm{End}_B(M)$

[8] если комплексное пространство с операторами неприводимо, то линейная оболочка этих операторов совпадает со всей матричной алгеброй

- Кривые и поверхности в $\mathbb{R}^n$: репер Френе; параллельный перенос; средняя и гауссова кривизна; первая и вторая квадратичные формы; формула Гаусса-Бонне.
- Связности в векторных расслоениях, евклидовы и эрмитовы связности; плоскость связности равносильна обращению в нуль её кривизны.
- Дифференциально-геометрическое описание классов Чженя и Эйлера.
- Римановы многообразия: связность Леви-Чивита; уравнения геодезических в форме Гамильтона и Лагранжа – Эйлера; уравнения Эйнштейна.

Анализ – 4 (теория меры)

- Теорема о продолжении меры.
- Предельный переход под знаком интеграла Лебега; теорема Фубини.
- Теорема Радона – Никодима.
- Теорема Рисса о разложении в ряд Фурье, преобразование Фурье на $\mathbb{R}$ и общее представление о двойственности Понтрягина.
- Закон больших чисел и центральная предельная теорема.

Алгебра – 4 (коммутативная алгебра и аффинная алгебраическая геометрия)

- Теорема Гильберта о базисе; все конечно порождённые алгебры над полем нётеровы.
- Свойства целых элементов в расширениях колец, лемма Гаусса[9]; конечно порождённая алгебра над произвольным полем $\Bbbk$ может быть полем только если все её элементы алгебраичны над $\Bbbk$.
- Расширения полей: степень трансцендентности; поле разложения и алгебраическое замыкание; описание конечных полей; соответствие Галуа.
- Теорема Гильберта о нулях; максимальный спектр, топология Зарисского; антиэквивалентность категории аффинных алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ и категории конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр.

[9] если $fg = h$ в $B[x]$, и старшие коэффициенты f, g равны единице, то все коэффициенты h целы над $A \subset B$ тогда и только тогда, когда целы все коэффициенты и у f и у g