АЛГЕБРА 1999/2000
II СЕМЕСТР

. , . , . , . , .

Листок 1

Определение 1.1. Пусть k — поле. Множество V называется *векторным* (или *линейным*) *пространством* над k, если на V определены операции сложения $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ и умножения на скаляр $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$, $\alpha \in k$, $v, v_1, v_2 \in V$ такие, что

- а) V является коммутативной группой относительно сложения, т.е. выполнены следующие условия:
  - а$_1$) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (коммутативность);
  - а$_2$) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ (ассоциативность);
  - а$_3$) Существует элемент $0 \in V$ такой, что $0 + v = v$ для всех $v \in V$;
  - а$_4$) Для каждого элемента $v \in V$ существует элемент $-v \in V$ такой, что $v + (-v) = 0$.
- б)
  - б$_1$) $1 \cdot v = v$ для всех $v \in V$;
  - б$_2$) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (ассоциативность).
- в)
  - в$_1$) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$ (дистрибутивность);
  - в$_2$) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (дистрибутивность).

При этом элементы V называются *векторами*, а элементы поля k — *скалярами*.

Упражнение 1.1. Пусть V — векторное пространство над полем k, $v \in V$, $\alpha \in k$

1) Докажите, что $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot v = 0$;
2) Докажите, что $-v = (-1)v$;
3) Докажите, что если $\alpha v = 0$, то либо $\alpha = 0$ либо $v = 0$.

Примеры 1.1.

1) Множество, состоящее из единственного элемента 0 с очевидными правилами умножения на скаляры является векторным пространством.
2) Пусть $K \supset k$ — расширение полей. Тогда K является векторным пространством над k. В частности, поле k является векторным пространством над самим собой.
3) Множество наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ из n элементов поля k с покомпонентными правилами сложения и умножения является векторным пространством над k, называемым *n-мерным арифметическим пространством* над k.

4) Кольцо многочленов $k[T]$ является векторным пространством над k. Множество многочленов $f \in k[T]$ таких, что $\deg f \leq d$ также является векторным пространством. С другой стороны, множество многочленов $f \in k[T]$ таких, что $\deg f = d$ не является векторным пространством (почему?).
5) Пусть X — множество, и пусть $F(X)$ — множество функций на X со значениями в поле k. Тогда $F(X)$ является векторным пространством над k. Более общо, множество отображений X в произвольное векторное пространство V над k также является векторным пространством над k.

Определение 1.2. Подмножество $W \subset V$ векторного пространства V над полем k называется *векторным* (или *линейным*) *подпространством*, если W является подгруппой V (т.е. замкнуто относительно сложения векторов) и переходит в себя при умножении на скаляры. Ясно, что векторное подпространство само является векторным пространством.

Упражнение 1.2. Какие из векторных пространств в примерах 1.1 являются подпространствами других векторных пространств из этих примеров?

Упражнение 1.3. Пусть W_1, W_2 — подпространства векторного пространства V. Докажите, что пересечение $W_1 \cap W_2$ и сумма $W_1 + W_2 = \left\{ \sum\limits_{\substack{w_1 \in W_1 \\ w_2 \in W_2}} w_1 + w_2 \right\}$ (называемая также *линейной оболочкой* W_1 *и* W_2; ср. ниже определение 1.6 и упражнение 1.12) также являются векторными подпространствами V.

Пример 1.2. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in k$, $i = 1, \ldots, n$. В векторном пространстве V из примера 1.1, 3) рассмотрим подмножество $W_\alpha = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V \mid \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0\}$. Тогда W_α — векторное подпространство V. Такие подпространства называются *гиперплоскостями*.

Определение 1.3. Пусть V и W — векторные пространства над полем k, и пусть $A : V \to W$ — отображение. Говорят, что A — *линейное отображение* (или *линейный оператор*), если для произвольных векторов $v_1, v_2 \in V$ и произвольных скаляров $\alpha_1, \alpha_2 \in k$ имеем $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 A(v_1) + \alpha_2 A(v_2)$.

Примеры 1.3.

1) Рассмотрим $V = \mathbb{C}$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть $z \in \mathbb{C}$ — комплексное число. Определим линейный оператор $A_z : V \to V$ формулой $v \mapsto zv$. Тогда A_z — линейный оператор (геометрически A_z растягивает вектор v в $|z|$ раз и поворачивает на угол $\operatorname{Arg} z$).
2) Пусть V — векторное пространство, и пусть $W = k$. Тогда линейные отображения $V \to W$ называются *линейными функционалами*. Например, в условиях примера 1), $\operatorname{Re} v$ и $\operatorname{Im} v$ являются линейными функционалами, а $\operatorname{Arg} v$ таковым не является.
3) Пусть V — пространство бесконечно дифференцируемых вещественнозначных функций на прямой $\mathbb{R}$, и пусть $D\colon V \to V$ — отображение,

сопоставляющее функции её производную. Тогда D — линейный оператор.

4) Пусть V — пространство непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0,1]$, и пусть $I\colon V \to \mathbb{R}$ — отображение, сопоставляющее функции f число $\int\limits_0^1 f(t)dt$. Тогда I — линейный функционал. Более общо, для произвольной интегрируемой функции g на отрезке $[0,1]$ можно рассмотреть линейный функционал $I_g\colon V \to \mathbb{R}$, сопоставляющий функции f число $\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$ (так что $I = I_1$). Произвольная точка $x \in [0,1]$ определяет важный функционал J_x на V, для которого $J_x(f) = f(x)$. Этот функционал получается с помощью предыдущей конструкции, если в качестве g взять «δ-функцию Дирака», соответствующую точке x.
5) Пусть K — поле характеристики p. Тогда K содержит подполе $k \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, элементы которого являются кратными единицы поля K, и является векторным пространством над k. Рассмотрим *отображение Фробениуса* $F\colon K \to K$, $F(a) = a^p$. Тогда F является линейным оператором (докажите!).

Упражнение 1.4. Освежив, если необходимо, свою память с помощью первого листка за прошлый семестр, дайте определения:

1) Ядра $\operatorname{Ker} A$ и образа $\operatorname{Im} A$ линейного оператора $A\colon V \to W$. Докажите, что $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ являются векторными пространствами;
2) Мономорфизма, эпиморфизма и изоморфизма векторных пространств;
3) Факторпространства линейного пространства V по линейному подпространству $W \subset V$. Докажите универсальное свойство факторпространств (аналог задачи 1.22 из первого листка за прошлый семестр).

Упражнение 1.5. Пусть V — пространство многочленов степени не выше d из $\mathbb{R}[T]$ (см. пример 1.1, 4)), и пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор, сопоставляющий многочлену его вторую производную. Найдите $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$.

Задача 1.6. Пусть $W_1, W_2 \subset V$ — линейные подпространства векторного пространства V. Постройте естественный изоморфизм линейных пространств $(W_1 + W_2)/W_2$ и $W_1/(W_1 \cap W_2)$.

Определение 1.4. Пусть V — векторное пространство над полем k. Линейное подпространство $W \subset V$ называется *гиперплоскостью,* если существует линейный функционал $f\colon V \to k$ такой, что $W = \operatorname{Ker} f$.

Упражнение 1.7. Докажите, что в случае n-мерного арифметического пространства определение 1.4 эквивалентно определению, данному в примере 1.2.

Задача 1.8. Докажите, что всякое линейное подпространство W векторного пространства V является пересечением гиперплоскостей.

Пусть V и W — векторные пространства над полем k. Множество линейных отображений из V в W само является линейным пространством над k. Это пространство мы будем обозначать через $\operatorname{Hom}_k(V, W)$. В случае, если $W = V$, векторное пространство $\mathrm{Hom}_k(V, V)$ обозначается также через $\mathrm{End}_k V$, а его элементы называются линейными *эндоморфизмами* (или преобразованиями в себя) пространства V. Более того, композиция отображений задаёт на векторном пространстве $\mathrm{End}_k V$ структуру *алгебры* над полем k.

Упражнение 1.9. Найдите алгебру $\mathrm{End}_k V$ в случае, если $V \simeq k$.

Задача 1.10. Для каких векторных пространств V алгебра $\mathrm{End}_k V$ коммутативна?

Определение 1.5. Пространство линейных функционалов $\mathrm{Hom}_k(V, k)$ на V называется *двойственным* (или *сопряжённым*) пространством к V и обозначается через V^*.

Задача 1.11. Для векторного пространства V обозначим через V^{**} двойственное пространство к V^*. Определим линейное отображение $\rho\colon V \to V^{**}$, положив $\rho(v)(f) = f(v)$ при $v \in V$, $f \in V^*$. Докажите, что это линейное отображение является мономорфизмом. Векторные пространства, для которых ρ является изоморфизмом, называются *рефлексивными.* Приведите пример векторного пространства V, не являющегося рефлексивным (т.е. такого, что отображение ρ не эпиморфно).

Определение 1.6. Пусть V — векторное пространство над полем k, и пусть $v_1, \dots, v_m \in V$ — набор векторов. Вектор $v \in V$ называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \dots, v_m$, если $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ для некоторого набора скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in k$.

Векторы $v_1, \dots, v_m$ называются *линейно независимыми,* если любая их нетривиальная линейная комбинация отлична от нуля, т.е. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

Линейной оболочкой $\langle S\rangle$ подмножества $S \subset V$ называется наименьшее линейное подпространство V, содержащее S. Другими словами, $\langle S\rangle = \bigcap\limits_{L \supset S} L$.

Говорят, что множество $S \subset V$ *линейно порождает* V, если $\langle S\rangle = V$.

Упражнение 1.12. Пусть S — подмножество векторного пространства V. Докажите, что линейная оболочка S совпадает с множеством конечных линейных комбинаций векторов из S.

Определение 1.7. Векторное пространство V над полем k называется *конечномерным,* если существует конечное множество $S \subset V$ такое, что $\langle S\rangle = V$ и *бесконечномерным* в противном случае.

Упражнение 1.13. Что можно сказать о конечномерности векторных пространств из примера 1.1?

Определение 1.8. Конечное множество векторов $S = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ называется *базисом* векторного пространства V над полем k, если

(i) $\langle S\rangle = V$;
(ii) векторы $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы.

Задача 1.14. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис векторного пространства V над полем k, и пусть $v_1, \dots, v_m$ — линейно независимая система векторов из V. Докажите, что

1) $m \le n$;
2) $m = n$ тогда и только тогда, когда $v_1, \dots, v_m$ также является базисом V.

Указание. Воспользуйтесь индукцией и определением факторпространства (см. упражнение $1.4, 3)$).

Следствие-Определение 1.8. Все базисы конечномерного векторного пространства V состоят из одного и того же числа векторов n, которое называется *размерностью* V над k и обозначается $\dim_k V$ или просто $\dim V$.

Пример 1.4. Пусть $K \supset k$ — расширение полей. Если K — конечномерное векторное пространство над k, то говорят, что расширение конечно. В этом случае размерность $\dim_k K$ называется *степенью* расширения и обозначается $[K : k]$ (например, $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$; разумеется, $[K : K] = \dim_K K = 1$).

Задача 1.15.

1) Докажите, что трансцендентное расширение полей $K \supset k$ бесконечномерно;
2) Докажите, что конечное расширение полей $K \supset k$ алгебраично;
3) Приведите пример бесконечномерного алгебраического расширения полей $K \supset k$;
4) Пусть $\xi \in \mathbb{C}$ — алгебраическое число, $f \in \mathbb{Z}[T]$ — его минимальный многочлен. Найдите $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}]$.

Задача 1.16. Пусть K — конечное поле. Докажите, что K состоит из p^n элементов, где $p = \operatorname{char} K$ — простое, а n — натуральное число.

Упражнение 1.17. Докажите, что конечномерные линейные пространства рефлексивны.

Упражнение 1.18. Докажите, что все векторные пространства размерности n над полем k изоморфны друг другу.

Задача 1.19. Пусть $a \in k$. Докажите, что многочлены 1, $T-a$, $(T-a)^2$, $\dots$ $(T-a)^d$ образуют базис в пространстве всех многочленов степени не выше d из $k[T]$. Найдите коэффициенты в разложении многочлена $P(T) \in k[T]$, $\deg P \le d$ по этому базису.

Задача 1.20. Многочлены степени не выше d от m переменных образуют векторное пространство. Найдите какой-нибудь базис этого пространства и определите его размерность.

Задача 1.21. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем k. Докажите, что

1) Максимальная длина строго возрастающей цепочки линейных подпространств $V_0 \subset V_1 \subset \cdots$ (т.е. такой, что $V_i \ne V_{i+1}$; такая цепочка называется *флагом*) равна $n+1$. При этом $\dim V_i \ge i$ и $\dim V_i = i$ при всех $0 \le i \le n$ тогда и только тогда, когда флаг максимален;

2) Максимальная длина строго убывающей цепочки векторных подпространств $V_0 \supset V_1 \supset \cdots$ (т.е. такой, что $V_i \neq V_{i+1}$) равна $n+1$. При этом $\dim V_i \le n-i$ и $\dim V_i = n-i$ при всех $0 \le i \le n$ тогда и только тогда, когда флаг максимален.

Задача 1.22. Пусть V — n-мерное векторное пространство, $W \subset V$ — m-мерное векторное подпространство. Найдите размерность факторпространства V/W.

Задача 1.23. Пусть $W_1, W_2 \subset V$ — линейные подпространства. Докажите, что $\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$.

Задача 1.24. Пусть V и W — векторные пространства, $A\colon V \to W$ — линейный оператор. Найдите $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A$.

Задача 1.25. Пусть $W \subset V$ — линейное подпространство векторного пространства V. Найдите минимальное количество гиперплоскостей $W_1, \dots, W_m$ таких, что $W = \bigcap\limits_{i=1}^{m} W_i$ (ср. задачу 1.8).

Упражнение-определение 1.26. Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства над полем k. Прямой суммой (или прямым произведением) V_1 и V_2 называется множество пар (v_1, v_2), $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ с покоординатными операциями сложения и умножения на элементы поля k. Прямая сумма V_1 и V_2 обозначается через $V_1 \oplus V_2$, а прямое произведение — через $V_1 \times V_2$ (понятия прямой суммы и прямого произведения становятся различными при бесконечном числе слагаемых/сомножителей). Проверьте, что прямая сумма векторных пространств сама является векторным пространством. Докажите, что пространство $V = V_1 \oplus V_2$ конечномерно тогда и только тогда, когда таковыми являются V_1 и V_2 и найдите размерность V в этом случае.

Упражнение 1.27. Пусть V_1, V_2 — линейные подпространства векторного пространства V. Рассмотрим линейный эпиморфизм $A\colon V_1 \oplus V_2 \to V_1 + V_2$, $A(v_1, v_2) = v_1 + v_2$. Найдите $\operatorname{Ker} A$.

Определение 1.9. Пусть V и W — векторные пространства над полем k, и пусть $A\colon V \to W$ — линейное отображение. Число $\dim(\operatorname{Im} A)$ называется *рангом* A и обозначается через $\operatorname{rk} A$. Ясно, что $\operatorname{rk} A \ge 0$ и $\operatorname{rk} A = 0$ если и только если $A = 0$. Кроме того, $\operatorname{rk} A \le \dim W$, и, решив задачу 1.24, вы убедитесь, что $\operatorname{rk} A \le \dim V$. Если $\operatorname{rk} A = \min\{\dim V, \dim W\}$, то оператор A называется *невырожденным.*

Упражнение 1.28. Пусть V и W — векторные пространства над полем k, и пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор ранга один. Докажите, что A имеет вид $A(v) = f(v) \cdot w$, где $f \in V^*$, $w \in W$.

Задача 1.29. Пусть V и W — векторные пространства над полем k, и пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1) $\operatorname{rk} A = m$;
2) $A = A_1 + \cdots + A_m$, где $A_1, \dots, A_m$ — линейные операторы ранга один, и A не представим в виде $A = A_1 + \cdots + A_r$, где $A_1, \dots, A_r$ — линейные операторы ранга один и $r < m$.

Задача 1.30. Пусть k — поле, $\operatorname{char} k = 0$, пусть $x_1, \dots, x_r \in k$ — набор (различных) элементов поля k, пусть $m_1, \dots, m_r$ — набор натуральных чисел, и пусть $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$, где V_i — m_i-мерное арифметическое пространство над полем k. Обозначим через P_d векторное пространство многочленов из $k[T]$ степени, не превосходящей d. Пусть $\varphi\colon P_d \to V$ — отображение такое, что $\varphi = \bigoplus_{i=1}^{r} \varphi_i$, где $\varphi_i(f) = (f(x_i), f'(x_i), \dots, f^{(m_i-1)}(x_i))$, $f(T) \in P_d$.

1) При каких d и m_i отображение φ является
   a) мономорфизмом?
   b) эпиморфизмом?
   c) изоморфизмом?
2) Задача интерполяции состоит в отыскании для заданного элемента $v \in V$ прообразов $\varphi^{-1}(v)$. Докажите, что задача интерполяции имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $m = \sum_{i=1}^{r} m_i = d - 1$.
4) Найдите явные формулы для решения задачи интерполяции в следующих случаях:
   a) $r = m$, $m_i = 1$, $i = 1, \dots, r$, $d = m + 1$;
   b) $r = 1$, $m_1 = m$, $d = m + 1$;
   c) $r = 2$, $m_1 = m_2 = a$, $m = 2a$, $d = 2a + 1$.

Пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор. Определим отображение $A^*\colon W^* \to V^*$ формулой $A^*(f(v)) = f(A(v))$, где $f \in W^*$, $v \in V$.

Определение 1.10. Оператор A^* называется *сопряжённым* к A.

Упражнение 1.31. Докажите, что A^* действительно является линейным оператором. Найдите сопряжённые операторы к тождественному и нулевому оператору. Проверьте, что сопряжённые операторы обладают следующими свойствами:

1) $(A + B)^* = A^* + B^*$, где $A, B\colon V \to W$ — линейные операторы;
2) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$, $\alpha \in k$;
3) $(BA)^* = A^* B^*$, где $A\colon V \to W$, $B\colon W \to U$;
4) Если V — рефлексивное пространство, то при отождествлении $V^{**} = V$ из задачи 1.11 имеем $A^{**} = (A^*)^* = A$.

Задача 1.32. Пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор ранга r. Найдите ранг сопряжённого оператора A^*.

Упражнение 1.33. Пусть V — конечномерное векторное пространство, и пусть V^* — сопряжённое пространство. Докажите, что $\dim V^* = \dim V$. Более того, если $e_1, \dots, e_n$ — базис V, а f_i — линейный функционал на V такой, что $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, где $1 \le i, j \le n$, а δ_{ij} — символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{для } i = j \\ 0 & \text{для } i \ne j \end{cases}$, то $f_1, \dots, f_n$ — базис пространства V^*.

Определение 1.11. Построенный в упражнении 1.33 базис называется *сопряжённым* (к базису $e_1, \dots, e_n$).

Пусть W — линейное подпространство векторного пространства V, и пусть $W^\perp \subset V^*$ — линейное подпространство сопряжённого пространства, состоящее из функционалов, обращающихся в нуль на W. Иногда $W^\perp$ называется *ортогональным дополнением* к W. Например, если W — гиперплоскость, заданная в V уравнением $f(v) = 0$, $f \in V^*$ (см. пример 1.2), то $W^\perp = kf$ — одномерное линейное подпространство, порождённое функционалом f.

Задача 1.34.

1) Докажите, что ограничение функционала с V на W определяет изоморфизм $V^*/W^\perp \to W^*$. В частности, в конечномерном случае $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$;
2) Докажите, что если V рефлексивно (например, конечномерно; см. упражнение 1.17), то при отождествлении V с V^{**} имеем $W^{\perp\perp} = (W^\perp)^\perp = W$;
3) Докажите, что если $W_1, W_2 \subset V$ — линейные подпространства, то $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ и $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

Задача 1.35. Пусть V и W — конечномерные векторные пространства, $A\colon V \to W$ — линейный оператор. Факторпространство $W/\operatorname{Im} A$ называется *коядром* A и обозначается $\operatorname{Coker} A$. Постройте изоморфизмы $\operatorname{Ker} A^* \to (\operatorname{Coker} A)^*$ и $\operatorname{Ker} A \to (\operatorname{Coker} A^*)^*$. Выразите полученные результаты с помощью понятия ортогонального дополнения из предыдущей задачи.

Определение 1.12. Пусть V и W — конечномерные векторные пространства, и пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор. *Индексом* A называется число $\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Coker} A - \dim \operatorname{Ker} A$.

Задача 1.36. Докажите, что для всякого линейного оператора $A\colon V \to W$ имеем $\operatorname{ind} A = \dim W - \dim V$. В частности, индекс одинаков у всех линейных операторов (хотя, разумеется, размерности ядра и коядра у разных операторов различны).

Пусть V — векторное пространство, пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор, и пусть $w \in W$ — произвольный вектор. Выражение вида $Av = w$ называется (векторным) линейным уравнением, а вектор $v \in V$ — решением этого уравнения. Таким образом, уравнение $Av = w$ имеет решение тогда и только тогда, когда $v \in \operatorname{Im} A$. Более того, вектор $v \in V$ является решением уравнения $Av = w$ тогда и только тогда, когда таковым является вектор v', где $v' = v + x$, $x \in \operatorname{Ker} A$ (проверьте!). Уравнение $Av = 0$ называется *однородным*, а уравнение $Av = w$ при $w \neq 0$ — *неоднородным.* Решив следующую задачу, вы убедитесь насколько очевидна геометрически доказываемая обычно алгебраически теорема о решениях системы линейных уравнений.

Задача 1.37 (альтернатива Фредгольма). Пусть V — конечномерное векторное пространство, и пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор. Линейное уравнение $Av = w$ имеет решение при всех $w \in V$ тогда и только тогда, когда однородное линейное уравнение имеет лишь тривиальное решение $v = 0$. В этом случае решение уравнения $Av = w$ единственно при всех $w \in V$.

Задача 1.38. Пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор, и пусть $w \in W$ — вектор. Докажите, что линейное уравнение $Av = w$ имеет решение тогда и только тогда, когда $w \in \operatorname{Ker} A^{*\perp}$. Выведите отсюда альтернативу Фредгольма.

В упражнениях 1.26 и 1.27 мы ввели определение прямой суммы двух подпространств. Его нетрудно распространить на случай любого числа слагаемых.

Определение 1.13. Пусть $V_1, \dots, V_r$ — линейные подпространства векторного пространства V. Говорят, что V является *прямой суммой* V_i и пишут $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} V_i$, если всякий вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде $v = v_1 + \dots + v_r$, где $v_i \in V_i$, $i = 1, \dots, r$.

Задача 1.39. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

a) $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} V_i$;

b)

   b$_1$) $V = V_1 + \dots + V_r$,

   b$_2$) $V_i \cap \sum\limits_{j \neq i} V_j = 0$ для всех $1 \le i \le r$.

Если V конечномерно, то условие b$_2$) в b) эквивалентно следующему условию

   b$_2'$) $\dim V = \sum\limits_{i=1}^{r} \dim V_i$.

Определение 1.14. Элемент p кольца R называется *идемпотентом,* если $p^2 = p$. Линейный оператор $P\colon V \to V$ называется *проектированием,* если он является идемпотентом.

Нетрудно видеть, что обычная проекция вдоль подпространства (например, ортогональная проекция) является проектированием в смысле определения 1.14.

Задача 1.40. Пусть $P\colon V \to V$ — оператор проектирования. Докажите, что $V = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$, причём если $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in \operatorname{Ker} P$, $v_2 \in \operatorname{Im} P$, то $P(v) = v_2$.

Разложению $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} V_i$ естественно отвечают операторы $P_i\colon V \to V$ такие, что $P_i(v) = v_i$, где $i = 1, \dots, r$, $v = v_1 + \dots + v_r$.

Задача 1.41.

1) Докажите, что операторы P_i являются проектированиями (т.е. $P_i^2 = P_i$), причём $P_iP_j = 0$ при $i \neq j$, а их сумма $\sum\limits_{i=1}^{r} P_i$ является тождественным оператором.
2) Обратно, пусть $P_i\colon V \to V$, $i = 1, \dots, r$ — операторы проектирования такие, что $P_iP_j = 0$ при $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{r} P_i = E$, где $E\colon V \to V$ — тождественный (единичный) оператор (т.е. $E(v) = v$ для всех $v \in V$; иногда этот оператор обозначают также I или id). Докажите, что $V = \sum\limits_{i=1}^{r} V_i$, где $V_i = \operatorname{Im} P_i$, а $P_i(v) = v_i$, $v = v_1 + \dots + v_r$.

Задача 1.42. Пусть V — векторное пространство, $A\colon V \to V$ — линейный оператор. Докажите, что $A = BP$, где $P\colon V \to V$ — проектирование, а $B\colon W \to W$, $W = \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} P$ — невырожденный (т.е. обратимый) линейный оператор.

Пусть V и W — конечномерные векторные пространства над полем k, $\dim V = n$, $\dim W = m$, пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор, и пусть $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_m$ — базисы пространств V и W соответственно. Тогда $Ae_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$, $j = 1, \dots, n$, где $a_{ij} \in k$. Матрица порядка $m \times n$ (a_{ij}) называется *матрицей линейного отображения* A.

Упражнение 1.43. Докажите, что выбор базисов в пространствах V и W определяет изоморфизм между векторным пространством линейных отображений из V в W и векторным пространством $m \times n$-матриц (с очевидными операциями). В частности, $\operatorname{Hom}_k(V, V)$ является векторным пространством размерности mn.

Упражнение 1.44. Пусть V — конечномерное векторное пространство.

1) Найдите матрицу линейного функционала $f\colon V \to k$;
2) Найдите матрицу оператора вложения $i\colon k \to V$, при котором $i(\alpha) = \alpha v$, $v = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j e_j$, где $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V;
3) Найдите матрицу оператора проектирования $P\colon V \to V$ в базисе $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_l$, где $e_1, \dots, e_m$ — базис $\operatorname{Im} P$, а $f_1, \dots, f_l$ — базис $\operatorname{Ker} P$.

Пусть U, V и W — векторные пространства размерностей l, m и n соответственно, и пусть $B\colon U \to V$ и $A\colon V \to W$ — линейные отображения. Выбрав базисы в U, V и W, мы можем сопоставить оператору B $m \times l$-, а оператору A — $n \times m$-матрицу. Их произведению $AB\colon U \to W$ соответствует $n \times l$-матрица, называемая *произведением* матриц A и B.

Упражнение 1.45. Выведите формулу для элементов произведения двух матриц (чтобы избежать вычислений, можно воспользоваться аддитивностью и вычислить произведение базисных элементов в линейном пространстве матриц).

Задача 1.46. Пусть V и W — векторные пространства, $\dim V = n$, $\dim W = m$, и пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор. Выберем базисы в пространствах V и W. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

a) $\operatorname{rk} A = 1$ (см. определение 1.9);
b) Матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

где произведение матрицы-столбца на матрицу-строку понимается в смысле упражнения 1.45;

c) Все строки матрицы A пропорциональны друг другу;

d) Все столбцы матрицы A пропорциональны друг другу;

e) Все миноры второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{lj} & a_{lk} \end{vmatrix} = a_{ij}a_{lk} - a_{ik}a_{lj}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n$$

равны нулю.

Задача-определение 1.47. Пусть V, W — векторные пространства, $\dim V = n$, $\dim W = m$, и пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор. Выберем в V и W базисы так, что оператор A изображается матрицей порядка $m \times n$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

a) Ранг линейного оператора A равен r (см. определение 1.9);

b) Среди строк соответствующей матрицы (рассматриваемых как элементы n-мерного арифметического пространства) имеется ровно r линейно независимых;

c) Среди столбцов соответствующей матрицы (рассматриваемых как элементы m-мерного арифметического пространства) имеется ровно r линейно независимых.

Указание: можно воспользоваться задачами 1.46 и 1.29.

Таким образом, (максимальное) количество линейно независимых строк (или столбцов) матрицы не зависит от выбора базисов в пространствах V и W и называется *рангом матрицы.*

Задача 1.48. Пусть V и W — векторные пространства, $\dim V = n$, $\dim W = m$, и пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор. Выберем базисы в V и W, так что оператору A соответствует матрица порядка $m \times n$, и рассмотрим двойственные базисы в V^* и W^* (см. упражнение 1.33). Найдите матрицу сопряжённого оператора A^* (см. определение 1.10) в этих базисах.

Упражнение-определение 1.49. Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис V. Докажите, что линейный оператор $A\colon V \to V$ обратим тогда и только тогда, когда образом базиса является базис, т.е. $Ae_1 = f_1, \ldots, Ae_n = f_n$ — базис пространства V. Обратно, пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ — два базиса пространства V. Тогда существует единственный линейный оператор $A\colon V \to V$ такой, что $A(e_i) = f_i$, $i = 1, \ldots, n$. Матрица этого оператора в указанных базисах называется *матрицей перехода* от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{f_i\}$.

Задача 1.50. Пусть V и W — векторные пространства, $\dim V = n$, $\dim W = m$, пусть $e'_1, \ldots, e'_n$ и $e''_1, \ldots, e''_n$ — базисы в пространстве V, а $f'_1, \ldots, f'_m$ и $f''_1, \ldots, f''_m$ — базисы в пространстве W, и пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор. Обозначим через A' (соотв. A'') матрицу оператора A в базисах $e'_1, \ldots, e'_n$

и $f'_1, \dots, f'_m$ (соотв. $e''_1, \dots, e''_n$ и $f''_1, \dots, f''_m$), и пусть $B\colon V \to V$ — матрица перехода от базиса $e'_1, \dots, e'_n$ к базису $e''_1, \dots, e''_n$, а $C\colon W \to W$ — матрица перехода от базиса $f'_1, \dots, f'_m$ к базису $f''_1, \dots, f''_m$. Докажите, что $A'' = C^{-1}A'B$.

Определение 1.15. Пусть V — векторное пространство, и пусть $W \subset V$ — линейное подпространство. Подпространство W называется *инвариантным* относительно линейного оператора $A\colon V \to V$, если $A(W) \subset W$. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* оператора A с *собственным значением* λ, если $Av = \lambda v$ (в этом случае kv — инвариантное подпространство).

Упражнение 1.51. Найдите все инвариантные подпространства, собственные векторы и соответствующие собственные значения у операторов проектирования (см. определение 1.14).

Упражнение 1.52. Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор, и пусть $W \subset V$, $\dim W = m$ — инвариантное подпространство. Выберем базис в V так, что первые m его элементов образуют базис в W. Как выглядит матрица A в этом базисе?

Определение 1.16. Пусть V — векторное пространство. Линейный оператор $A\colon V \to V$ называется *диагонализуемым,* если в V существует базис из собственных векторов A.

Упражнение 1.53.

1) Найдите матрицу диагонализуемого оператора в базисе из его собственных векторов;
2) Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора;
3) Найдите ранг диагонализуемого линейного оператора.

Определение 1.17. Пусть V — векторное пространство. Линейный оператор $A\colon V \to V$ называется *нильпотентным,* если $A^k = 0$ для некоторого натурального числа k.

Упражнение 1.54. Какие значения может принимать ранг нильпотентного линейного преобразования n-мерного векторного пространства V в себя?

Задача 1.55. Какие из следующих подмножеств являются линейными подпространствами в векторном пространстве всех линейных преобразований конечномерного векторного пространства V?

a) Все диагонализуемые линейные операторы;
b) Все обратимые линейные операторы;
c) Все операторы проектирования;
d) Все нильпотентные линейные операторы;
e) Все линейные операторы ранга r;
f) Все линейные операторы, ранг которых не превосходит r.

Задача 1.56. Какие из подмножеств, перечисленных в предыдущей задаче, замкнуты относительно произведения (композиции) линейных операторов?