АЛГЕБРА 1999/2000
II СЕМЕСТР

. , . , . , . , .

Листок 2

Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем k. Как мы видели, линейные преобразования V образуют векторное пространство размерности n^2. Выбор базиса в V определяет базис в $\operatorname{End}_k V, V$. При этом вырожденные линейные операторы образуют подмножество $\operatorname{End}_k V, V$, которое, очевидно, замкнуто в любой разумной топологии. Оказывается, что это подмножество является *гиперповерхностью,* т.е. задаётся единственным уравнением $\Delta(A) = 0$, являющимся многочленом степени n от элементов (a_{ij}) матрицы A, являющимися координатами A в указанном выше базисе. Из задачи 1.47 следует, что $\Delta(A) = 0$ тогда и только тогда, когда столбцы (или строки) матрицы A линейно зависимы. Одна функция с таким свойством нам известна — это ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы-столбцы. В известных из школьной математики случаях (прямая, плоскость и пространство) функция Δ от n векторов из V (столбцов) обладает следующими свойствами (в предположении, что исходный базис состоит из векторов единичной длины, направленных вдоль координатных осей):

а) Δ линейна по каждой из переменных, т.е. для каждого $1 \leqslant j \leqslant n$ имеем $\Delta(a_1, \dots, a'_j + a''_j, \dots, a_n) = \Delta(a_1, \dots, a'_j, \dots, a_n) + \Delta(a_1, \dots, a''_j, \dots, a_n)$, где $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n, a'_j, a''_j \in V$ — произвольные векторы. Это свойство Δ называется *полилинейностью.*

б) Если $a_{j_1} = a_{j_2}$ для некоторых $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n$, то $\Delta(a_1, \dots, a_n) = 0$. Это свойство (очевидное для объёма) называется *кососимметричностью* (по поводу названия см. ниже упражнение 2.1).

в) Пусть $e_i \in V$ — i-ый базисный вектор, т.е. $e_i^j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда $\Delta(e_1, \dots, e_n) = 1$ (это условие называется *условием нормировки*).

Определение 1.1. Функция на пространстве $n \times n$-матриц, удовлетворяющая перечисленным выше условиям а)–в) называется *определителем* или *детерминантом.*

Упражнение 2.1. Докажите, что полилинейная функция $f(a_1, \dots, a_n)$ кососимметрична в смысле б) тогда и только тогда, когда при перестановке любых двух векторов a_i и a_j, $i \neq j$ её значение меняется на противоположное.

Теорема 2.1. *Пусть* $\Delta(a_1, \ldots, a_n)$ *— функция столбцов матрицы* A*, удовлетворяющая условиям а)–в). Тогда*

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n) a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n},$$

где $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ *пробегает множество всех перестановок чисел* $1, 2, \ldots, n$*, а* $\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (k_1, k_2, \ldots, k_n) \text{ — чётная перестановка;} \\ -1, & \text{если } (k_1, k_2, \ldots, k_n) \text{ — нечётная перестановка.} \end{cases}$
В частности, определитель существует и однозначно определён при всех $n > 0$.

Определитель матрицы A, существующий и однозначно определённый по теореме 2.1, обозначается через $\det A$.

Задача 2.2. Пусть A — $n \times n$-матрица, и пусть A^t — транспонированная матрица (согласно задаче 1.48, A^t является матрицей сопряжённого оператора A^* в двойственном базисе). Докажите, что $\det A = \det A^t$.

Задача 2.3. Докажите, что определитель является полилинейной кососимметрической функцией строк матрицы.

Задача 2.4. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \times n$. Используя определение 2.1, докажите, что $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Задача 2.5. Пусть V — конечномерное векторное пространство. Используя задачу 1.50, докажите, что определитель матрицы линейного преобразования $A \colon V \to V$ не изменяется при переходе к другому базису V.

Задача 2.6. Пусть V — конечномерное векторное пространство. Докажите, что линейное преобразование $A \colon V \to V$ вырождено тогда и только тогда, когда определитель соответствующей ему матрицы равен нулю.

Задача 2.7. Пусть V — конечномерное векторное пространство, $W \subset V$ — линейное подпространство, и пусть $A \colon V \to V$ — линейный оператор. Предположим, что W — инвариантное подпространство для A, и выберем базис в V как в упражнении 1.52. Тогда соответствующая матрица (которую мы также будем обозначать через A) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где B и D — квадратные матрицы. Докажите, что $\det A = \det B \cdot \det D$.

Определение 2.2. Определитель $r \times r$-подматрицы матрицы A называется *минором порядка* r *матрицы* A.

Максимальный порядок минора отличного от нуля минора матрицы A называется *рангом* матрицы A.

Пусть теперь A — квадратная $n \times n$-матрица. Минор подматрицы, расположенной симметрично относительно главной диагонали A, называется *главным минором.* Минор матрицы, полученной вычёркиванием из A i-ой строки и j-го столбца, домноженный на $(-1)^{i+j}$, называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} и обозначается A_{ij}.

Задача 2.8. Докажите, что ранг линейного оператора совпадает с рангом соответствующей ему матрицы.

Задача 2.9. Докажите, что $\det A = \sum\limits_i a_{ij}A_{ij} = \sum\limits_j a_{ij}A_{ij}$.

Задача 2.10. Предположим, что A — невырожденная $n \times n$-матрица (т.е., согласно задаче 2.6, $\det A \neq 0$), и пусть A^{-1} — обратная матрица (т.е. матрица обратного оператора в том же базисе). Докажите, что

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.3. Пусть A — $n \times n$-матрица. Многочлен $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A.

Задача 2.11. Докажите, что, с точностью до знака, коэффициенты характеристического многочлена $n \times n$-матрицы A совпадают с суммами главных миноров матрицы A. В частности, свободный член $P(\lambda)$ — это определитель матрицы A, а коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$, где $\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ — *след* матрицы A.

Из задачи 2.5 вытекает, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса. Таким образом, можно говорить о *характеристическом многочлене линейного оператора.* Поэтому из задачи 2.11 следует, что главные миноры матрицы (и, в частности, её след) также инвариантны относительно замены базиса.

Задача 2.12. Пусть V — конечномерное векторное пространство, и пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор. Следующие условия эквивалентны:

a) $\lambda \in k$ — собственное значение A;
b) $\lambda \in k$ — корень характеристического многочлена A.

Следствие 2.2. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем k. Тогда каждый линейный оператор $A\colon V \to V$ имеет собственный вектор.*

Определение 2.4. Пусть V — n-мерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем k, пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор, и пусть $P(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i = n$ — характеристический многочлен A. Множество $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ собственных значений A называется *спектром* оператора A. В случае, если $n_1 = \dots, n_r = 1$, т.е. все корни характеристического многочлена простые, говорят, что оператор A имеет *простой спектр.*

Задача 2.13. Пусть V — n-мерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем k, и пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ — собственные значения A, и пусть V_i —

собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_i (т.е. $V_i = \{v \in V \mid Av = \lambda_i v\}$). Докажите, что векторные подпространства V_i линейно независимы, т.е. $V_1 + \dots + V_r = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$.

Следствие 2.3. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем k, и пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор, обладающий простым спектром. Тогда в V существует базис из собственных векторов A, т.е. A диагонализуем (см. определение 1.16).*

Следующая важная теорема справедлива над любым полем, но мы пока докажем её только для векторных пространств над алгебраически замкнутым полем.

Теорема 2.4 (Гамильтона-Кэли). *Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем k, пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор, и пусть $P(\lambda)$ — характеристический многочлен A. Тогда $P(A) = 0$.*

Особенно важны для приложений векторные пространства над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Определение 2.5. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Обозначим через $V_{\mathbb{R}}$ то же пространство, рассматриваемое как векторное пространство над $\mathbb{R}$. Тогда $V_{\mathbb{R}}$ называется *овеществлением* пространства V.

Задача 2.14. Пусть V – -n-мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$, и пусть $e_1, \dots, e_n$ — его базис. Докажите, что $e_1, \dots, e_n; ie_1, \dots, ie_n$ — базис овеществления $V_{\mathbb{R}}$ пространства V (здесь i — мнимая единица). В частности, $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$ $= 2\dim_{\mathbb{C}} V$.

Задача2.15. В условиях задачи 2.14, пусть $A = B + iC$ — матрица линейного преобразования $A\colon V \to V$ в базисе $e_1, \dots, e_n$. Найдите матрицу соответствующего линейного преобразования $V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ в базисе $e_1, \dots, e_n; ie_1, \dots, ie_n$. Чему равен её определитель?

Определение 2.6. Пусть V — вещественное векторное пространство. Комплексной структурой на V называется линейный оператор $J\colon V \to V$ такой, что $J^2 = -E$.

Заметим, что если V — комплексное векторное пространство, а $V_{\mathbb{R}}$ — его овеществление, то оператор J умножения на мнимую единицу i позволяет полностью восстановить комплексную структуру на V.

Задача 2.16. Пусть (V, J) — вещественное векторное пространство с комплексной структурой J. Докажите, что J определяет на V структуру комплексного векторного пространства, а именно, $(a+bi)v = av + bJ(v)$. Выведите отсюда, что $\dim V \equiv 0 \pmod 2$, а матрица J в подходящем базисе V имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

где E — квадратная матрица порядка $\frac{1}{2}\dim V$.

Задача 2.17. В условиях задачи 2.16 опишите все линейные операторы $A\colon V \to V$, индуцирующие линейные операторы на соответствующем комплексном векторном пространстве.