АЛГЕБРА 1999/2000, II СЕМЕСТР

. , . , . , . , .

Листок 3

Задача 3.1. Найти все инварианты представления колчана из одной стрелки (между двумя разными вершинами).

Задача 3.2. Найти все неразложимые представления колчана — цепочки из трёх вершин и двух стрелок между ними (для всевозможных ориентаций).

Задача 3.3. Будем классифицировать с точностью до изоморфизма всевозможные тройки подпространств, то есть наборы $(V; V_1, V_2, V_3)$, где V — векторное пространство над полем k, а V_1, V_2, V_3 — подпространства пространства V.

а) Пусть $U = U_1 = U_2 = U_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3$. Докажите, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.

б) Пусть $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = 0$. Положим $U = U_1 = U_2 = V_1 \cap V_2,\ U_3 = 0$. Докажите, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.

в) Пусть $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = 0$. Положим $U_1 = V_1 \cap (V_2 + V_3)$, $U_2 = V_2 \cap (V_1 + V_3)$, $U_3 = V_3 \cap (V_1 + V_2)$, $U = U_1 + U_2 + U_3$. Докажите, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.

г) Описать все (с точностью до изоморфизма) неразложимые тройки подпространств.

д) Доказать, что в любое разложение данной тройки подпространств на неразложимые входят одни и те же (с точностью до изоморфизма) неразложимые тройки подпространств.

е) Какие численные инварианты однозначно определяют класс изоморфизма данной тройки подпространств?

Задача 3.4. (Теорема об изоморфизме) Пусть V — R-модуль, $U, W \subset V$ — подмодули. Тогда $U + W$ (то есть множество элементов из V, которые могут быть представлены в виде $u + v$ для некоторых $u \in U,\ w \in W$) является подмодулем модуля V, содержащим W, причём отображение $\varphi : u + (U \cap W) \mapsto u + W$ является изоморфизмом модулей $U/(U \cap W)$ и $(U + W)/W$.

Задача 3.5. (Теорема о соответствии) Пусть V — R-модуль, $W \subset V$ — подмодуль и $\pi : V \to V/W$ — каноническая проекция. Тогда $\overline{M} = M/W$ — подмодуль в $\overline{V} = V/W$ для любого подмодуля $M \subset V$ такого, что $W \subset M$, причём отображение $M \mapsto \overline{M}$ является биекцией между множеством подмодулей V, содержащих W, и множеством подмодулей $\overline{V}$. Кроме того, $V/M \simeq \overline{V}/\overline{M} = (V/W)/(M/W)$.

Задача 3.6. Построить все композиционные ряды $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/(12\mathbb{Z})$.

Задача 3.7. Пусть n — натуральное число.

а) Какие простые $\mathbb{Z}$-модули и с какой кратностью входят в композиционный ряд $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
б) Для каких n $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ разлагается в прямую сумму $\mathbb{Z}$-модулей.

Задача 3.8. Какие простые $\mathbb{C}[x]$-модули и с какой кратностью входят в композиционный ряд $\mathbb{C}[x]$-модуля $V = \mathbb{C}^3$, в котором x действует матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}?$$

Задача 3.9. Доказать, что любой ненулевой гомоморфизм простого модуля в простой модуль обратим.

Задача 3.10.

а) Найдите все инвариантные подпространства оператора дифференцирования по x в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ вещественных многочленов от x степени меньшей $n+1$.
б) То же для оператора сдвига $f(x) \mapsto f(x+a)$.

Задача 3.11. Пусть A и B — квадратные матрицы. Докажите, что минимальный многочлен блочно-диагональной матрицы

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов матриц A и B.

Задача 3.12. Пусть V — конечный модуль над произвольным кольцом R. Он называется *полупростым*, если для любого подмодуля $U \subseteq V$ найдётся дополнительный подмодуль W, то есть такой подмодуль $W \subseteq V$, что $V = U \oplus W$. Докажите, что

а) любой подмодуль полупростого модуля полупрост;
б) модуль полупрост тогда и только тогда, когда он является прямой суммой некоторых своих простых подмодулей;
в) прямая сумма полупростых подмодулей — полупростой модуль.

Задача 3.13. Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Линейный оператор в пространстве V называется *полупростым*, если для любого инвариантного подпространства U найдётся дополнительное инвариантное подпространство W, то есть такое, что $V = U \oplus W$. Докажите, что оператор полупрост тогда и только тогда, когда его матрица в некотором базисе диагональна.

Задача 3.14. Найдите жорданову нормальную форму матрицы A и выясните геометрический смысл соответствующего линейного оператора, если $A^2 = E$; $A^2 = A$.

Задача 3.15. Докажите, что если матрицы A и B удовлетворяют соотношению
$AB - BA = B$, то матрица B нильпотентна.

Задача 3.16. Пусть A и B — матрицы порядка n. Докажите, что если $\operatorname{tr} A^m = \operatorname{tr} B^m$ для всех $m = 1, \ldots, n$, то характеристические многочлены матриц A и B равны.

Задача 3.17.

а) Пусть A и B — любые матрицы порядка n. Докажите, что характеристические многочлены матриц AB и BA равны.

б) Докажите, что для любых $n \times n$ матриц A и B, хотя бы одна из которых невырождена, матрица AB подобна матрице BA.

в) Всегда ли верно утверждение пункта б) для вырожденных матриц?

Задача 3.18. Докажите, что сумма двух перестановочных полупростых операторов является полупростым оператором.

Задача 3.19.

а) Докажите, что всякий линейный оператор $\mathcal{A}$ может быть единственным образом представлен в виде суммы перестановочных полупростого и нильпотентного операторов $\mathcal{A}_s$ и $\mathcal{A}_n$.

б) Докажите, что $\mathcal{A}_s$ и $\mathcal{A}_n$ можно выразить как многочлены от $\mathcal{A}$ без свободного члена.

Задача 3.20. Докажите, что если для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в конечномерном комплексном линейном пространстве выполнены равенства $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^2 = \mathcal{E}$, то в V существует одномерное или двумерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Задача 3.21.

а) Докажите, что уравнение $XY - YX = E$ неразрешимо в конечных матрицах X, Y над полем нулевой характеристики.

б) Введите понятие бесконечной матрицы (с бесконечным числом строк и/или столбцов). Приведите примеры условий, когда можно перемножать такие матрицы. Найдите решение уравнения из пункта а) в бесконечных матрицах.

Задача 3.22. Докажите, что модуль R/I прост тогда и только тогда, когда идеал I максимален.

Задача 3.23. Докажите, что кольцо является нётеровым тогда и только тогда, когда любой модуль конечного типа над этим кольцом нётеров.

В задачах 3.24–3.28 предполагается, что кольцо A ассоциативно, коммутативно и содержит единицу.

Определение. A-модуль V называется *циклическим*, если $V = Av$ для некоторого $v \in V$. Элемент v называется *образующей* модуля V.

Задача 3.24. Докажите, что циклический модуль $V = Av$ изоморфен $A/\operatorname{Ann}(v)$, где $\operatorname{Ann}(v) = \{a \in A \mid av = 0\}$. (С другой стороны, очевидно, что для любого идеала $I \subset A$ модуль A/I является циклическим с образующей $1 + I$).

Задача 3.25. Пусть U — подмодуль свободного модуля V ранга n над евклидовым кольцом A. Докажите, что найдётся такой базис $e_1, \dots, e_n$ модуля V и такие ненулевые элементы $u_1, \dots, u_m \in A$, что $u_1e_1, \dots, u_me_m$ — базис подмодуля U, причём $u_i | u_{i+1}$ при $1 \leqslant i \leqslant m-1$.

Задача 3.26. Пусть u и v — взаимно простые элементы евклидова кольца A. Докажите, что справедливы следующие утверждения:

а) $A/(uv) \cong A/(u) \oplus A/(v)$ (изоморфизм колец и A-модулей);
б) $v(A/(u)) = A/(u)$.

Задача 3.27. Пусть V — модуль над евклидовым кольцом A, разлагающийся в прямую сумму примарных циклических модулей. Докажите, что число слагаемых этого разложения, изоморфных $A/(p^m)$ (где p — простой элемент кольца A), равно

$$\dim(p^{m-1}V/p^mV) - \dim(p^mV/p^{m+1}V),$$

где $p^{m-1}V/p^mV$ и $p^mV/p^{m+1}V$ рассматриваются как векторные пространства над полем $A/(p)$.

Определение. Циклический A-модуль, изоморфный $A/(u)$, называется *примарным*, если $u = p^m$, где p — простой элемент кольца A.

Задача 3.28. Докажите, что всякий конечнопорождённый модуль над евклидовым кольцом A разлагается в прямую сумму свободных и примарных циклических модулей, причём набор этих циклических модулей определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Задача 3.29. Докажите, что некоторая степень минимального многочлена матрицы делится на ее характеристический многочлен.

Задача 3.30. Пусть у обратимой матрицы A минимальный многочлен $p(\lambda)$ равен характеристическому. Чему равен минимальный многочлен матрицы A^{-1}?

Задача 3.31. Пусть минимальный многочлен матрицы A равен $\prod(x-\lambda_i)^{k_i}$. Чему равен минимальный многочлен блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & A \end{pmatrix}?$$

Задача 3.32. Пусть число различных собственных значений матрицы A равно m. Положим $b_{ij} = \operatorname{tr} A^{i+j}$ и обозначим через d_k определитель матрицы $(b_{ij})_{0 \leqslant i,j<k}$. Докажите, что $d_m \neq 0$ и $d_{m+1} = 0$.

Задача 3.33. Найдите условия, при которых вещественная матрица A, имеющая на побочной диагонали числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, а на остальных местах нули, диагонализуема

а) над полем вещественных чисел;
б) над полем комплексных чисел?

Задача 3.34. Докажите, что если степень минимального многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ равна размерности пространства, то всякий оператор, перестановочный с $\mathcal{A}$, равен некоторому многочлену от $\mathcal{A}$.

Задача 3.35. Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное поле. Две $n \times n$ матрицы A и B с коэффициентами из $\mathbb{K}$ называются подобными, если $B = K^{-1}AK$ для некоторой обратимой $n \times n$ матрицы K с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Две $n \times n$ матрицы F и G с коэффициентами из $\mathbb{K}[x]$ называются эквивалентными, если $G = CFD$ для некоторых $n \times n$ матриц C и D с коэффициентами из $\mathbb{K}[x]$ и определителем в $\mathbb{K}^*$. Докажите, что две $n \times n$ матрицы A и B с коэффициентами из $\mathbb{K}$ подобны в том и только в том случае, если их характеристические матрицы $F = xE - A$ и $G = xE - B$ эквивалентны. Как найти матрицу K, осуществляющую подобие A и B, если известны матрицы C и D, осуществляющие эквивалентность F и G?

Задача 3.36. Подмодуль $V \subseteq \mathbb{Z}^3$ порожден столбцами матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

а) Разложите фактормодуль $\mathbb{Z}^3/V$ в сумму циклических $\mathbb{Z}$-модулей.

б) Совпадают ли образы в $\mathbb{Z}^3/V$ у столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}?$$