АЛГЕБРА 1999/2000
II СЕМЕСТР

. , . , . , . , .

Листок 4

Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем k. В листке 2 мы уже ввели понятие полилинейных функций на V. Особенно важную роль в математике играют билинейные функции, называемые обычно *билинейными формами.*

Определение 4.1. *Билинейной формой* на V называется функция $B\colon V\times V\to K$, линейная по каждому аргументу.

Для векторов $v_1, v_2 \in V$ мы будем часто обозначать $B(v_1, v_2)$ через $\langle v_1, v_2\rangle$.

Примеры.

1) Пусть $\dim V = 1$, и пусть e — базис пространства V. Тогда всякая билинейная форма имеет вид $B(v,w) = \lambda xy$, где $v = xe$, $w = ye$, а $\lambda \in k$.
2) Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V, и пусть $B = (b_{ij})$ — произвольная $n\times n$-матрица. Для векторов $v_1, v_2 \in V$, $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ положим $\langle v_1, v_2\rangle = B(v_1, v_2) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$. Ясно, что B — билинейная форма.
3) $\operatorname{tr} A_1 \cdot A_2$ — билинейная форма на пространстве $\operatorname{End}_k V$.
4) Пусть V — векторное пространство непрерывных функций на отрезке $[a,b]$. Для функций $f, g \in V$ положим $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Тогда $\langle\ ,\ \rangle$ — билинейная форма.
5) Пусть V — плоскость, и пусть для векторов v_1, v_2 $\langle v_1, v_2\rangle$ — ориентированный объём паралеллограмма, образованного этими векторами (т.е. по сути — определитель матрицы второго порядка; см. листок 2). Тогда $\langle\ ,\ \rangle$ — билинейная форма.

Пример 2) имеет общий характер. Именно, пусть V — конечномерное векторное пространство, пусть B — билинейная форма на V, и пусть пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V. Положим $b_{ij} = B(e_i, e_j)$.

Определение 4.2. Матрица (b_{ij}) называется матрицей билинейной формы B в базисе e_i.

В силу билинейности, для векторов $v_1, v_2 \in V$, $v_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ имеем $B(v_1, v_2) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$.

Упражнение 4.1. Найдите (в подходящих базисах) матрицу B для билинейных форм, определенных в примерах 3 и 5.

Задача 4.2. Пусть V — векторное пространство, $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ — два базиса V, и пусть $C\colon V \to V$ — матрица перехода от базиса e_i к базису f_i (см. 1.49). Пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — билинейная форма на V, и пусть B — ее матрица в базисе e_i. Найдите матрицу $\langle\ ,\ \rangle$ в базисе f_i.

Определение 4.3. Билинейная форма B на векторном пространстве V называется *симметрической* (соотв. *кососимметрической*), если для всякой пары векторов $v_1, v_2 \in V$ имеем $B(v_2, v_1) = B(v_1, v_2)$ (соотв. $B(v_2, v_1) = -B(v_1, v_2)$).

Заметим, что над полем характеристики два понятия симметрической и кососимметрической формы совпадают.

Задача 4.3. Пусть V — векторное пространство над полем k, $\operatorname{char} k \neq 2$, и пусть B — билинейная форма на V. Докажите, что $B = B^+ + B^-$, где B^+ симметрическая, а B^- — антисимметрическая билинейная форма на V. Однозначно ли такое представление? Как найти формы B^+ и B^-? Что можно сказать в случае $\operatorname{char} k = 2$?

Задача 4.4. Пусть V — векторное пространство, и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — его базис. Пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — билинейная форма на V, и пусть B — соответствующая матрица. Найдите в терминах B условия, необходимые и достаточные для того, чтобы форма $\langle\ ,\ \rangle$ была симметрической (соотв. кососимметрической).

Определение 4.4. Пусть B — билинейная форма на векторном пространстве V. Векторное подпространство $\operatorname{Ker} B = \{w \in V \mid B(v, w) = 0 \ \ \forall v \in V\}$ называется *ядром* B. Форма B, для которой $\operatorname{Ker} B = 0$, называется *невырожденной*.

Задача 4.5. Пусть B — билинейная форма на векторном пространстве V, и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Докажите, что $\dim \operatorname{Ker} B = n - r$, где r — ранг матрицы B в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Пусть V — векторное пространство, и пусть B — билинейная форма на V. Тогда B определяет линейное отображение $\tilde{B}$ пространства V в двойственное пространство V^*, а именно $\tilde{B}(v) = f_v$, где $f_v \in V^*$ — линейный функционал такой, что $f_v(w) = B(v, w)$. Обратно, если $T\colon V \to V^*$ — линейный оператор, то, полагая $B(v_1, v_2) = (T(v_1))(v_2)$, получаем билинейную форму B на V.

Задача 4.6. Проверьте, что построенное выше соответствие между билинейными формами и линейными отображениями $V \to V^*$ является изоморфизмом. При этом $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} \tilde{B}$. В частности, невырожденные билинейные формы соответствуют изоморфизмам $V \xrightarrow{\sim} V^*$.

Определение 4.5. Пусть V — векторное пространство с билинейной формой B, а $W \subset V$ — его линейное подпространство. Подпространство W называется *невырожденным*, если ограничение $B\big|_W$ невырождено и *изотропным*, если $B\big|_W = 0$. *Ортогональным дополнением* к W относительно формы B называется линейное подпространство $W^\perp = \{v \in V \mid B(w,v) = 0 \;\; \forall w \in W\}$ (в частности, $V^\perp = \operatorname{Ker} B$).

Пусть V — векторное пространство с симметрической или кососимметрической формой B, и пусть $W - subset B$ — линейное подпространство.

Задача 4.7. Докажите, что

а) Если подпространство W невырождено, то $V = W \oplus W^\perp$;

б) Если подпространства W и $W^\perp$ невырождены (это всегда так, если B — невырожденная билинейная форма на V), то $(W^\perp)^\perp = W$

(учитывая задачу 4.6, сравните результаты задачи 4.7 со свойствами ортогонального дополнения, определённого в листке 1 перед задачей 1.34).

Мы постараемся выбрать базис пространства V, в котором матрица билинейной формы B имеет по возможности простой вид. Для произвольной билинейной формы это сделать нелегко, но в наиболее интересных случаях, когда форма B симметрична или кососимметрична, канонический вид билинейной формы оказывается весьма простым.

Задача 4.8. Пусть V — векторное пространство, а B — кососимметрическая билинейная форма на V. Тогда $V = \operatorname{Ker} B \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, где $\dim V_i = 2$, $i = 1, \dots, m$, $V_j \subset V_i^\perp$ при $i \neq j$, а ограничение формы B на V_i совпадает с билинейной формой из примера 5); в частности, в подходящем базисе матрица формы B на V_i имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (базис всего пространства V, получающийся объединением базиса $\operatorname{Ker} B$ и описанных выше пространств V_i, называется *симплектическим*). Заметим, что из приведённого выше описания следует, что ранг кососимметрической формы чётен ($= 2m$).

Перейдём к исследованию симметрических билинейных форм. С каждой билинейной формой $B\colon V \times V \to k$ связана *квадратичная форма* $Q\colon V \to k$, $Q(v) = B(v,v)$ (т.е. Q является композицией диагонального отображения $\Delta\colon V \to V \times V$ и отображения $B\colon V \times V \to k$). Если (b_{ij} — матрица нашей формы в базисе $e_1, \dots, e_n$ (см. определение 4.2), а $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$, то $Q(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$, что и объясняет название «квадратичная форма». Ясно, что одна и та же квадратичная форма может соответствовать различным билинейным формам. Однако симметрическая билинейная форма восстанавливается по соответствующей квадратичной форме однозначно.

Задача 4.9. Предположим, что $\operatorname{char} k \neq 2$, и пусть $Q\colon V \to k$ — квадратичная форма. Тогда существует единственная симметрическая билинейная форма B, порождающая Q. Найдите явный вид формы B и опишите все другие билинейные формы, порождающие Q.

Задача 4.10. Пусть V — векторное пространство над полем k, $\operatorname{char} k \neq 2$, и пусть B — симметрическая билинейная форма на V. Тогда $V = \operatorname{Ker} B \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, где $\dim V_i = 1$, $i = 1, \dots, m$, прямые V_i ортогональны друг другу (т.е. $V_j \subset V_i^\perp$ при $i \neq j$), а ограничение формы B на V_i совпадает с билинейной формой из примера 1). Другими словами, в базисе $e_1, \dots, e_n$, получающемся объединением базисов $\operatorname{Ker} B$ и пространств V_i (такие базисы называются *ортогональными*) матрица формы B диагональна, $B(x, y) = \sum\limits_{i=n-m+1}^{n} \lambda_i x_i y_i$, а соответствующая квадратичная форма имеет вид $Q(x) = \sum\limits_{i=n-m+1}^{k} \lambda_i x_i^2$ (здесь $e_1, \ldots, e_{n-m}$ — базис $\operatorname{Ker} B$, $\lambda_i \in k$, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — векторы из V).

В то время как абсолютная величина вещественного числа определяется его квадратом, модуль комплексного числа определяется его произведением на сопряжённое комплексное число. Это замечание объясняет, почему над полем $\mathbb{C}$ (и другими полями, в которых существует оператор сопряжения со сходными свойствами) чаще приходится рассматривать не билинейные, а полуторалинейные формы.

Определение 4.6. Отображение $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$, где V — векторное пространство над $\mathbb{C}$, называется *полуторалинейным*, если оно линейно по первому аргументу и полулинейно по второму (последнее означает, что $B(v, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \overline{\lambda_1} B(v, v_1) + \overline{\lambda_2} B(v, v_2)$ для всех $v, v_1, v_2 \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$).

Упражнение 4.11. Постройте аналоги примеров, приведённых в начале этого листка, для полуторалинейных форм.

Задача 4.12. Решите аналог задачи 4.2 для полуторалинейных форм.

Определение 4.7. Полуторалинейная форма B на комплексном векторном пространстве V называется *эрмитовой*, если для произвольных векторов $v_1, v_2 \in V$ имеет место соотношение $B(v_2, v_1) = \overline{B(v_1, v_2)}$.

Задача 4.13. Охарактеризуйте матрицы эрмитовых форм (ср. задачу 4.4).

Точно так же, как по билинейной форме можно построить квадратичную, по полуторалинейной форме $B = B(x, y)$, $x, y \in V$ можно построить форму $Q\colon V \to \mathbb{C}$, $Q(x) = B(x, x)$.

Задача 4.14. Докажите, что полуторалинейная форма на комплексном векторном пространстве V *однозначно* определяется соответствующей формой Q (ср. задачу 4.9!).

Задача 4.15. Пусть V — комплексное векторное пространство, и пусть B — полуторалинейная форма на V. Докажите, что следующие условия эквивалентны.

а) Форма B эрмитова;
б) $Q\colon V \to \mathbb{R}$, т.е. для произвольного вектора $x \in V$ число $Q(x) = B(x, x)$ вещественно.

Задача 4.16. Решите аналоги задач 4.7 и 4.10 для эрмитовых форм.

Задачи 4.10 и 4.16 позволяют (в подходящем базисе e_i) привести квадратичную форму к сумме квадратов с коэффициентами $\lambda_i \in k$. В случае, если в поле k существуют элементы μ_i такие, что $\mu_i^2 = \lambda_i$ (это всегда так, если k алгебраически замкнуто), заменив векторы e_i на $f_i = \mu_i e_i$, мы видим, что форма приводится к сумме квадратов. Для произвольного поля это уже не так.

Задача 4.17. Пусть $q = p^m$, где p — простое число, пусть $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, пусть V — векторное пространство над $\mathbb{F}_q$, и пусть Q — квадратичная форма на V. Докажите, что существует базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V такой, что $Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$, где $x \in V$, $x_1, \ldots, x_n$ — координаты x в базисе $e_1, \ldots, e_n$, $r \leqslant n$ — ранг Q, а $\varepsilon \in \mathbb{F}_p$ (причём ε можно умножать на любой элемент из $(\mathbb{F}_q \setminus 0)^2$, так что если, например, $m = 1$, $p \equiv 3 \pmod 4$, то можно взять $\varepsilon = \pm 1$).

Задача 4.18. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$ (соотв. $\mathbb{C}$), и пусть Q — квадратичная форма на V, соответствующая симметрической билинейной (соотв. эрмитовой полуторалинейной) форме B.

1) Докажите, что существует базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V такой, что $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+l}^2$, где $x \in V$, $x_1, \ldots, x_n$ — координаты x в базисе $e_1, \ldots, e_n$, $r = k + l \leqslant n$ — ранг Q, причём числа k, l и $n - r$ положительных, отрицательных и нулевых квадратов соответственно не зависят от выбора базиса. Этот факт называется теоремой инерции, а тройка чисел $(k, l, n - r)$ — сигнатурой или индексом квадратичной формы Q.
2) Если все главные миноры $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ матрицы симметрической билинейной формы, соответствующей Q, отличны от нуля, то, в обозначениях пункта 1), число l равно числу перемен знака в последовательности вещественных (докажите это!) чисел $1, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$.

Перейдём к более систематическому изучению векторных пространств, оснащённых симметрической билинейной (или, что то же, квадратичной) формой, над произвольным полем k, $\operatorname{char} k \neq 0$. Как обычно, исследование проводится по модулю некоторого отношения эквивалентности, в данном случае — изометричности.

Определение 4.8. Пусть V и W — векторные пространства над полем k, и пусть B_V и B_W — билинейные формы на V и W соответственно. Линейное отображение $A \colon V \to W$ называется *изометрией*, если A — изоморфизм векторных пространств и $B_W(A(v_1), A(v_2)) = B_V(v_1, v_2)$ для всех $v_1, v_2 \in V$.

Ясно, что изометричность является отношением эквивалентности, причём если B — симметрическая форма, то из задачи 4.9 следует, что для доказательства того, что A — изометрия, достаточно проверить, что $Q_W(A(v)) = Q_V(v)$, где Q_V и Q_W — квадратичные формы, соответствующие B_V и B_W.

Определение 4.9. Пусть V — векторное пространство над полем k, $\operatorname{char} k \neq 2$, пусть B — симметрическая билинейная форма на V, и пусть $U \subset V$ — невырожденная плоскость (т.е. двумерное векторное подпространство такое, что $B\big|_U$ — невырожденная форма). U называется *гиперболической плоскостью*, если U содержит (ненулевой) изотропный вектор.

Пространство V называется *гиперболическим*, если $V = \bigoplus\limits_i U_i$, где U_i — гиперболические плоскости и $U_i \perp U_j$ при $i \neq j$ (заметим, что, по определению, размерность гиперболического пространства чётна).

Пространство V называется *анизотропным*, если V не содержит изотропных векторов, т.е. $Q(v) \neq 0$ при $v \neq 0$, где $Q(v) = B(v, v)$.

Упражнение 4.19. Пусть V — векторное пространство с невырожденной симметрической билинейной формой B, и пусть $U \subset V$ — гиперболическая плоскость.

а) Докажите, что U имеет базис из двух изотропных векторов $u_1, u_2 \in U$ такой, что $B(u_1, u_1) = B(u_2, u_2) = 0$, $B(u_1, u_2) = 1$;

б) Докажите, что для всякого элемента $\lambda \in k$ существует элемент $u \in U$, $u \neq 0$ такой, что $B(u, u) = \lambda$.

Замечание. Заметим, что в теории чисел принята другая, пожалуй, более понятная терминология, чем в определении 4.9. Так, квадратичная форма $q(x, y)$ от двух переменных над k называется гиперболической, если линейной заменой переменных она приводится к виду xy или, что эквивалентно, $x^2 - y^2$ (ср. упражнение 4.19 а)). Говорят, что квадратичная форма $q(x_1, \ldots, x_n)$ представляет элемент $\lambda \in k$, если $q(x) = \lambda$ для некоторого $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$; в частности, форма представляет нуль тогда и только тогда, когда в пространстве существует (ненулевой) изотропный вектор. Упражнение 4.19 б) показывает, что если в V существует (ненулевой) изотропный вектор, то форма $q(v) = B(v, v)$ представляет нуль.

Теорема Витта. *Пусть V и V' — изометричные невырожденные векторные пространства над полем k, $\operatorname{char} k \neq 2$ с симметрическими билинейными формами B и B' соответственно, пусть $U \subset V$ и $U' \subset V'$ — векторные подпространства, и пусть $A_U \colon U \to U'$ — изометрия. Тогда существует изометрия $A \colon V \to V'$ такая, что $A\big|_U = A_U$.*

Задача 4.20. Докажите теорему Витта, проделав следующие шаги.

1) Докажите, что если U вырождено, то существует линейное подпространство $U \subset \bar{U} \subset V$ и линейное отображение $A_{\bar{U}} \colon \bar{U} \to V'$ такие, что $\dim \bar{U} = \dim U + 1$, $A_{\bar{U}}\big|_U = A_U$ и если $\bar{U}' = A_{\bar{U}}(\bar{U})$, то $A_{\bar{U}} \colon \bar{U} \to \bar{U}'$ — изометрия. Другими словами, изометрия продолжается с вырожденного линейного подпространства (для доказательства можно воспользоваться упражнением 4.19 а));
2) Пусть $V' = V$, и пусть $U \subset V$, $U = ku$ — неизотропная прямая. Положим $u' = A_U(u)$. Тогда теорема Витта справедлива для подпространства U. (*Указание.* Пусть $E = v^{\perp}$, где $v = u + u'$ или $v = u - u'$ выбран так, чтобы прямая kv была анизотропна. Положите $A'v = -v$, $A'\big|_E = \mathrm{id}$ и проверьте, что, в зависимости от выбора v, $A = \mp A'$ — искомое продолжение).
3) Пусть $V' = V$ (это всегда можно предполагать) и $\dim U \geqslant 2$. Докажите теорему Витта, воспользовавшись ортогональным разложением и индукцией по $\dim U$.

Задача 4.21. Пусть V — векторное пространство, невырожденное относительно симметрической билинейной формы B, и пусть $V' \subset V$ и $V'' \subset V$ — изометричные подпространства. Докажите, что $V'^{\perp}$ изометрично $V''^{\perp}$.

Задача 4.22. Пусть V — векторное пространство, невырожденное относительно симметрической билинейной формы B. Упорядочим все изотропные подпространства V по отношению включения. Докажите, что все максимальные изотропные подпространства изометричны между собой. Какова максимальная размерность изотропного подпространства?

Следующая задача даёт обобщение теоремы инерции (см. задачу 4.18) на случай произвольного поля k, $\operatorname{char} k \neq 2$.

Задача 4.23. Пусть V — векторное пространство с симметрической билинейной формой B. Докажите, что существуют линейные подпространства $V_0, V_h, V_a \subset V$ такие, что $V_0 \perp V_h$, $V_0 \perp V_a$, $V_h \perp V_a$, $V = V_0 \oplus V_h \oplus V_a$, V_0 изотропно, V_h гиперболично, а V_a анизотропно. Более того, разложение пространства V в прямую сумму V_0, V_h и V_a определено однозначно с точностью до изометрии V. (*Указание.* V_h строится как в задаче 4.19 а)).

Задача 4.23 сводит классификацию пространств с симметрической билинейной формой к классификации анизотропных пространств или, что то же, к классификации квадратичных форм, не представляющих нуля. Вообще говоря, в отличие от случая $k = \mathbb{R}$, такие формы могут быть устроены достаточно сложно, но для некоторых важных полей возможна полная их классификация.

Задача 4.24. Какие анизотропные пространства существуют над конечным полем $\mathbb{F}_q$, $q = p^m$, где p — простое число (ср. задачу 4.17)?

Обозначим через $\mathbf{W}(k)$ множество классов эквивалентности (с точностью до изометрии) анизотропных векторных пространств (т.е. пространств с квадратичной формой, не представляющей нуля) над полем k. Введём на $\mathbf{W}(k)$ операцию сложения, положив $[V_1] + [V_2] = [(V_1 \oplus V_2)_a]$ (квадратные скобки обозначают класс эквивалентности, $\oplus$ — ортогональную прямую сумму, а индекс a — анизотропную часть (см. задачу 4.23)).

Задача 4.25. Докажите, что $\mathbf{W}(k)$ является абелевой группой относительно введённой выше операции. Нулём этой группы является класс нулевого векторного пространства. Группа $\mathbf{W}(k)$ порождается классами одномерных пространств, квадратичная форма на которых имеет вид $Q(x) = \lambda x^2$, где $\lambda \in k^*/(k^*)^2$, $k^* = k \setminus 0$.

Определение 4.10. Группа $\mathbf{W}(k)$ называется *группой Витта* поля k.

Упражнение 4.26. Найдите группы $W(\mathbb{C})$, $W(\mathbb{R})$, $W(\mathbb{F}_q)$. Что можно сказать о группе $W(\mathbb{Q})$?

В определении 4.8 мы ввели понятие изометрии. Естественно попытаться описать все изометрии на себя векторного пространства V с билинейной формой B.

Определение 4.11. Изометрии векторного пространства V над полем k, сохраняющие симметрическую билинейную (соотв. симметрическую полуторалинейную, соотв. кососимметрическую билинейную) форму B, называются *ортогональными* (соотв. *унитарными*, соотв. *симплектическими*) преобразованиями V.

Задача 4.27. Пусть V — векторное пространство над полем k с симметрической билинейной формой B.

1) В обозначениях задачи 4.23 выясните, как устроены ортогональные преобразования подпространств V_0 и V_h.
2) Как устроены ортогональные преобразования анизотропного векторного пространства V_a над полем $\mathbb{R}$? Что можно сказать об их собственных значениях? Докажите, что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.
3) Найдите общий вид ортогональных преобразований векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем k, $\operatorname{char} k \neq 2$;

Задача 4.28. Пусть V — комплексное векторное пространство с невырожденной эрмитовой формой. Докажите, что всякий унитарный оператор $A\colon V \to V$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов. Что можно сказать о спектре A? Докажите, что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям A, ортогональны.

Перейдём к исследованию симплектических преобразований. Пусть V — векторное пространство с невырожденной кососимметрической формой B, $\dim V = 2n$ (ср. задачу 4.8). В отличие от симметрического случая, V всегда содержит много изотропных подпространств (например, таковыми являются все одномерные подпространства).

Задача 4.29. Упорядочим все изотропные подпространства V по включению. Докажите, что все максимальные изотропные подпространства изометричны и имеют одну и ту же размерность $n = \frac{1}{2}\dim V$ (ср. задачу 4.22).

Задача 4.30. Пусть, как и выше, V — $2n$-мерное симплектическое пространство, и пусть $W \subset V$ — максимальное изотропное подпространство. Тогда существует максимальное изотропное подпространство $W' \subset V$ такое, что $V = W \oplus W'$ и симплектическая форма на V определяет изоморфизм между W' и W^*. Более того, для любых двух пар изотропных подпространств $U, U' \subset V$, $W, W' \subset V$ таких, что $U \oplus U' = V$, $W \oplus W' = V$ существует симплектический автоморфизм $A\colon V \to V$ такой, что $A(U) = W$, $A(U') = W'$.

Задача 4.31. Докажите, что существует единственный многочлен с целыми коэффициентами $\operatorname{Pf} A$ степени n от элементов a_{ij} кососимметрической матрицы A порядка $2n$ со следующими свойствами:

а) $(\operatorname{Pf} A)^2 = \det A$;

б) $\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} = 1$, где E — единичная матрица порядка r;

в) Для произвольной матрицы C имеем $\operatorname{Pf} C^t A C = \det C \cdot \operatorname{Pf} A$.

Определение 4.12. Многочлен Pf называется *пфаффианом* кососимметрической матрицы.

Упражнение 4.32. Вычислите явно пфаффианы матриц порядка два, четыре и шесть как многочлены от коэффициентов.

Упражнение 4.33. Пусть A — кососимметрическая матрица. Докажите, что $\det A = 1$.

Определение 4.13. Многочлен $P(T) = a_0 + a_1T + \cdots + a_{d-1}T^{d-1} + a_dT^d$ называется *возвратным*, если $a_i = a_{d-i}$ для всех $0 \leqslant i \leqslant d$.

Задача 4.34. пусть A — симплектический автоморфизм пространства V. Докажите, что характеристический многочлен A возвратен. Выведите отсюда, что если λ — собственное значение A, то λ^{-1} также является собственным значением. Если $k = \mathbb{C}$, то числа $\bar{\lambda}$ и $\bar{\lambda}^{-1}$ также являются собственными значениями A.

Ортогональные (разных типов, в зависимости от сигнатуры квадратичной формы), унитарные и симплектические преобразования образуют группы, называемые классическими, играющие очень важную роль в математике (а также механике).

Упражнение 4.35. Используя определение 2.6 и последующие задачи из листка 2, выясните связь между ортогональными, унитарными и симплектическими преобразованиями на комплексификации вещественного пространства.

Вернёмся к случаю симметрической билинейной формы B на векторном пространстве V над полем k.

Определение 4.14. *Алгеброй Клиффорда*, соответствующей паре (V, B), называется алгебра C и k-линейное отображение $\rho\colon V \to C$ такие, что:

а) $(\rho(v))^2 = B(v, v) \cdot 1$, где 1 — единица в C, а v — произвольный элемент V;

б) Если $\varphi\colon V \to D$ — произвольное линейное отображение V в k-алгебру D такое, что $(\varphi(v))^2 = B(v, v) \cdot 1$ при всех $v \in V$, то существует единственный гомоморфизм k-алгебр $\tau\colon C \to D$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\varphi"'] & C \arrow[d, "\tau"] \\ & D \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Упражнение 4.36. Докажите, что если алгебра Клиффорда существует, то она единственна (с точностью до изоморфизма) и порождена $\rho(V)$.

Осталось построить алгебру Клиффорда. Чтобы это сделать строго, выберем ортогональный базис $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве V и для каждого подмножества $S \subset \{1, \ldots, n\}$ введём образующую e_S. Таким образом, мы получаем 2^n образующих (по определению, положим $e_\varnothing = 1$); векторное пространство над k с базисом $\{e_S\}$ обозначим через $C = C(V, B)$. Теперь нам нужно определить умножение в C. В очевидных обозначениях, положим

$$(\sum \lambda_S e_S) \cdot (\sum \mu_T e_T) = \sum \lambda_S \mu_T B(S, T) e_{S \nabla T},$$

где $B(S, T) = \prod\limits_{s \in S, t \in T} \operatorname{sgn} s, t \cdot \prod\limits_{r \in S \cap T} B(e_r, e_r)$, $\operatorname{sgn} s, t = \begin{cases} +1 & \text{при } s \leqslant t \\ -1 & \text{при } s > t, \end{cases}$, а $S \nabla T = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$ — симметрическая разность. Определим k-линейное отображение $\rho\colon V \to C$ условием $\rho(e_i) = e_{\{i\}}$.

Задача 4.37. Докажите, что построенная выше алгебра $C = C(V, B)$ ассоциативна и является алгеброй Клиффорда.

Задача 4.38. Исследуйте алгебру Клиффорда в случае, когда $\dim V = 1$. В частности, исследуйте случаи, когда $k = \mathbb{C}$, а также $k = \mathbb{R}$, а B — нулевая, положительно или отрицательно определённая форма. В каких из этих случаях вещественная алгебра C не имеет делителей нуля?

Задача 4.39. Исследуйте алгебру Клиффорда в случае $B = 0$ (в этом случае алгебра Клиффорда является *внешней* или *грассмановой* алгеброй, и мы подробно будем изучать её в следующем году). Приведите пример элемента $\omega \in C$ такого, что $\omega^2 \neq 0$.

Задача 4.40. Пусть $k = \mathbb{R}$, и пусть V — плоскость с отрицательно определённой квадратичной формой. Тогда C — *алгебра кватернионов* над $\mathbb{R}$ (можно взять это за определение). Найдите образующие и закон композиции (таблицу умножения) в этой алгебре. Чему соответствуют подалгебры, изоморфные $\mathbb{C}$? Докажите, что в алгебре кватернионов нет делителей нуля. Что изменится, если квадратичная форма не является отрицательно определённой?

Замечание. Можно доказать, что алгебры комплексных чисел и кватернионов — это единственные конечномерные ассоциативные алгебры над $\mathbb{R}$, не имеющие делителей нуля.

Квадратичные формы естественно возникают в самых различных областях математики, и с ними связано много интересных задач. Вот пример такой задачи.

Задача-проблема 4.41. Пусть V — линейное пространство симметрических матриц порядка m над (алгебраически замкнутым) полем k, и пусть $W \subset V$ — линейное подпространство. Можно также интерпретировать W как симметрическую матрицу порядка m элементами которой являются линейные функции на W. Наиболее предпочтительно рассматривать W как линейное семейство квадратичных форм от m переменных. Предположим, что все квадратичные формы из W имеют одинаковый ранг r. Докажите, что $\dim W \leqslant \begin{cases} 1, & \text{если } r \text{ нечётно} \\ m - r + 1, & \text{если } r \text{ чётно} \end{cases}$. При чётном r постарайтесь классифицировать все линейные семейства W квадратичных форм ранга r, для которых $\dim W = m - r + 1$.

Замечание. Для нечётных r ответ был известен ещё в прошлом веке. Для чётных r неравенство было доказано совсем недавно, причм̈ только над полем $\mathbb{C}$ и методами, довольно далеко выходящими за рамки линейной алгебры. Классификация «пограничных» линейных систем ещё не получена. Естественное обобщение предыдущей задачи — рассмотреть случай не обязательно линейного семейства. Точнее, пусть $W \subset V$ — подмножество, заданное несколькими однородными уравнениями произвольных степеней, и предположим, что все квадратичные формы из W имеют ранг r. Верно ли, что $\dim W \leqslant m - r + 1$ (определение размерности W было дано в первом семестре; задача 4.41 относится к случаю, когда все уравнения имеют степень один)? Ответ неизвестен.

Перейдём теперь к исследованию квадратичных форм в евклидовом (соотв. эрмитовом) пространстве. Удобно начать с изучения самосопряжённых (соотв. эрмитовых) операторов, которые играют важную роль как в математике, так и в физике.

Пусть V — евклидово векторное пространство со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор, и пусть $A^*\colon V^* \to V^*$ — сопряжённый оператор (см. определение 1.10). Согласно задаче 4.6, скалярное произведение определяет изоморфизм $V \simeq V^*$. Воспользовавшись этим изоморфизмом, мы можем считать, что $A^*\colon V \to V$, т.е. в евклидовом случае сопряжённый оператор действует в самом пространстве V, так что $A^* \in \operatorname{End} V$. По определению, для произвольной пары векторов $v_1, v_2 \in V$ имеем $\langle Av_1, v_2\rangle = \langle v_1, A^*v_2\rangle$.

В полуторалинейном случае скалярное произведение определяет изоморфизм V не с V^*, а с $\overline{V}^*$ (как обычно, черта обозначает комплексное сопряжение), а $\overline{\langle\ ,\ \rangle}$ даёт изоморфизм $V \simeq V^*$. Воспользовавшись этим изоморфизмом, мы и в полуторалинейном случае можем считать, что $A^* \in \operatorname{End} V$ и $\langle Av_1, v_2\rangle = \langle v_1, A^*v_2\rangle$.

Определение 4.15. Линейный оператор A в евклидовом (соотв. эрмитовом) векторном пространстве V называется *самосопряжённым* (соотв. *эрмитовым*), если $A^* = A$.

Задача 4.42.

а) Пусть V — евклидово (соотв. эрмитово) векторное пространство. Сопоставим каждому линейному оператору $A\colon V \to V$ билинейную форму $B(v_1, v_2) = \langle Av_1, v_2\rangle$. Докажите, что таким образом получается изоморфизм между векторным пространством $\operatorname{End} V$ и пространством билинейных (соотв. полуторалинейных) форм на V.

б) Найдите прообраз множества симметрических (соотв. эрмитовых) билинейных форм при отображении из а).

Задача 4.43. Как связаны матрицы линейного оператора и соответствующей ему билинейной формы (см. задачу 4.42)

а) В произвольном базисе?

б) В ортонормированном базисе?

Задача 4.44. Как связаны матрицы линейных операторов A и A^*

а) В произвольном базисе?

б) В ортонормированном базисе?

Что можно сказать о матрицах самосопряжённых и эрмитовых операторов?

Задача 4.45. Пусть V — евклидово (соотв. эрмитово) векторное пространство, и пусть $A\colon V \to V$ — самосопряжённый (соотв. эрмитов) линейный оператор. Докажите, что

а) Линейное подпространство $W \subset V$ инвариантно тогда и только тогда, когда $W^\perp$ инвариантно;

б) Все собственные значения A вещественны;

в) Собственные подпространства A, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны;

г) В пространстве V существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A (обратно, если линейный оператор в V представляется в виде вещественной диагональной матрицы в некотором ортонормированном базисе, то он самосопряжён (соотв. эрмитов)).

Задача 4.46.

а) Пусть V — n-мерное евклидово (соотв. эрмитово) векторное пространство, и пусть Q — квадратичная (соотв. эрмитова) форма на V. Докажите, что в V существует ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что Q имеет вид $Q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ (соотв. $Q(v) = \lambda_1 |x_1|^2 + \dots + \lambda_n |x_n|^2$), где $x_1, \dots, x_n$ — координаты вектора v относительно базиса $e_1, \dots, e_n$.

б) Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ (соотв. $\mathbb{C}$), и пусть Q_1, Q_2 — квадратичные (соотв. эрмитовы) формы на V. Докажите, что если форма Q_1 положительно определена, то в V существует базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что формы Q_1 и Q_2 имеют вид

$$\begin{aligned} Q_1(v) &= x_1^2 + \dots + x_n^2, \\ Q_2(v) &= \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \end{aligned}$$

(соотв.

$$\begin{aligned} Q_1(v) &= |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2, \\ Q_2(v) &= \lambda_1 |x_1|^2 + \dots + \lambda_n |x_n|^2), \end{aligned}$$

где $x_1, \dots, x_n$ — координаты вектора v относительно базиса $e_1, \dots, e_n$. Другими словами, квадратичные формы Q_1 и Q_2 можно одновременно привести к главным осям (в классической терминологии «главные оси» — это как раз базис, в котором матрица квадратичной формы имеет диагональный вид).

в) Вещественные (см. задачу 4.45 б)) числа λ_i из пунктов а) и б) являются корнями многочлена $\det(Q_2 - \lambda Q_1)$, причём кратность корня λ_i равна размерности собственного подпространства A, соответствующего собственному значению λ_i.

г) Приведите пример двух квадратичных (соотв. эрмитовых) форм на V, которые нельзя одновременно привести к главным осям.

Информация о структуре квадратичных форм в евклидовом пространстве, которую мы получили, весьма полезна для классификации аффинных квадрик.

Определение 4.16. Аффинной квадрикой в евклидовом пространстве V называется множество векторов $v \in V$, удовлетворяющих уравнению

$$(Av, v) + \langle b, v \rangle + c = 0,$$

где A — самосопряжённый линейный оператор на V, $b \in V$ — вектор, а $c \in \mathbb{R}$ — скаляр.

Пожелание 4.47. Постарайтесь воспользоваться приобретёнными в этом семестре знаниями, чтобы без громоздких вычислений вывести свойства аффинных квадрик в трёхмерном пространстве, которые вы изучали в курсе аналитической геометрии. Как обобщаются соответствующие результаты на многомерный случай?

Собственные векторы самосопряжённых (эрмитовых) операторов обладают важными экстремальными свойствами, которые удобно формулировать в терминах соответствующих квадратичных (эрмитовых) форм. Пусть V — n-мерное евклидово (соотв. эрмитово) векторное пространство, и пусть $A\colon V \to V$ — самосопряжённый линейный оператор с вещественными (см. задачу 4.45 б)) собственными значениями $\lambda_1 = \lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n = \lambda_n(A)$. Пусть $Q = Q_A$ — квадратичная форма, соответствующая A (см. задачу 4.42). Рассмотрим Q как непрерывную функцию на единичной сфере $S = \{v \mid \langle v, v\rangle = 1\}$.

Задача 4.48. Докажите, что $\lambda_1 = \max\limits_{v\in S} Q(v)$, а $\lambda_n = \min\limits_{v\in S} Q(v)$.

Задача 4.49 (Теорема Фишера-Куранта). Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\lambda_i = \min_{W} \max_{v\in W\cap S} Q(v) = \max_{W} \min_{v\in W\cap S} Q(v),$$

где $W \subset V$ пробегает множество векторных подпространств V коразмерности $i-1$.

Упражнение 4.50. Вычислите дифференциал функции $Q_A(v)$. В каких точках S дифференциал обращается в нуль? Как ведёт себя функция Q_A на S в окрестности этих точек?

Упражнение 4.51. Пусть V — евклидово (или эрмитово) векторное пространство, $\dim V = n$, и пусть $A, B\colon V \to V$ — самосопряжённые (или эрмитовы) линейные операторы. Предположим, что $B \geqslant 0$ в том смысле, что $Q_B(v) \geqslant 0$ для всех $v \in V$. Докажите, что для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ имеем $\lambda_i(A+B) \geqslant \lambda_i(A)$.

Задача 4.52. В условиях предыдущих задач, пусть $V' \subset V$ — гиперплоскость. Вообще говоря, V' не инвариантно относительно A (когда это так?). Пусть $P\colon V \to V'$ — оператор ортогонального проектирования на V'. Тогда $A' = P \circ A\big|_{V'}\colon V' \to V'$ —- самосопряжённый линейный оператор (почему?). Пусть $\lambda_i = \lambda_i(A)$, $i = 1, \dots, n$, $\lambda'_l = \lambda_l(A')$, $l = 1, \dots, n-1$. Докажите, что

$$\lambda_1 \geqslant \lambda'_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda'_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda'_{n-1} \geqslant \lambda_n.$$

Выведите отсюда соотношения между длинами осей эллипсоида, являющегося линейным сечением заданного эллипсоида $Q_A(v) = 1$, где $\lambda_n(A) > 0$ (ср. пожелание 4.47).

Задача 4.53.

а) Выведите из задачи 4.52 критерий Сильвестра (см. задачу 4.18 2)).
б) Более общо, пусть $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$, $\dim V_i = i$ — возрастающая цепочка линейных подпространств, пусть $P_i\colon V \to V_i$ — ортогональный проектор, пусть $A_i = P_i \circ A\big|_{V_i}\colon V_i \to V_i$, и пусть $P_i(\lambda)$

— характеристический многочлен самосопряжённого (или эрмитова) оператора A_i. Пусть a — вещественное число такое, что $P_i(a) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через $r_A(a)$ число перемен знака в последовательности вещественных чисел $1, P_1(a), \ldots, P_n(a)$. Докажите, что r_A совпадает с числом собственных значений оператора A, не превосходящих a. Аналогично, $r_A(b) - r_A(a)$ — это число собственных значений A на интервале (a, b).

Пусть A, B, C — эрмитовы операторы в комплексном n-мерном пространстве V. На протяжении многих десятилетий исследовался следующий вопрос:

Предположим, что $A + B = C$. Что можно сказать о спектрах λ_A, λ_B, λ_C (здесь, как и выше, спектр — это невозрастающая n-ка собственных значений)*?*

Существуют очевидные соотношения, например

$$\operatorname{tr} C = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B \tag{1}$$

или

$$\lambda_1(C) \leqslant \lambda_1(A) + \lambda_1(B). \tag{2}$$

Однако полный ответ на этот классический вопрос, использующий многое из того, что вы узнали в курсе алгебре в этом году и того, что узнаете в следующем, был дан совсем недавно (доказательство так называемой гипотезы Хорна). Здесь мы ограничимся только самыми простыми результатами в этом направлении, смысл которых пока останется скрытым.

Задача 4.54. Предположим, что $\operatorname{rk} B \leqslant i$. Докажите, что тогда $\lambda_1(C) \geqslant \lambda_{i+1}(A)$.

Задача 4.55 (Неравенства Г. Вейля). Пусть $0 \leqslant i, j \leqslant n$, $i + j + 1 \leqslant n$. Докажите, что

$$\lambda_{i+j}(C) \leqslant \lambda_{i+1}(A) + \lambda_{j+1}(B). \tag{3}$$

Упражнение 4.56. Докажите, что если $\operatorname{rk} B \leqslant i$, то $\lambda_{i+j}(A) \leqslant \lambda_j(C)$ и $\lambda_{i+j}(C) \leqslant \lambda_j(A)$ для $1 \leqslant i, i + j \leqslant n$ (эти неравенства обобщают неравенство из задачи 4.54 и являются следствием неравенств из задачи 4.55).

Задача 4.57. Докажите, что при $n = 2$ неравенства (1), (2) и (3) необходимы и достаточны для существования матриц A, B, C с указанными выше свойствами.

Задача 4.58. Докажите, что

$$\lambda_2(C) + \lambda_3(C) \leqslant \lambda_1(A) + \lambda_3(A) + \lambda_1(B) + \lambda_3(B). \tag{4}$$

Задача 4.59. Докажите, что для любого $r < n$ и для любого подмножества из r элементов $I \subset \{1, \ldots, n\}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda_i(C) &\leqslant \sum_{i \in I} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(B), \\ \sum_{i \in I} \lambda_i(C) &\leqslant \sum_{i \in I} \lambda_i(B) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(A). \end{aligned} \tag{5}$$

Задача 4.60. Докажите, что при $n = 3$ неравенства (1)–(5) необходимы и достаточны для существования матриц A, B, C с указанными выше свойствами.