В сентябре 2000 состоится ЭКЗАМЕН ПО СПЕЦКУРСУ
'Алгебраическая топология с геометрической точки зрения'

As wise as serpents, as harmless as doves.
I. Murdoch, *The Bell*

Программа (звездочками отмечены затронутые, но не рассмотренные подробно темы; для получения оценки '5' достаточно понимать темы 'без звездочек' и уметь решать по ним задачи).

1. [RS §1, FF §18] Гомотопические инварианты отображений

a)* $S^n \to S^n$ (Основная теорема топологии, Брауэра–Хопфа).

b) n-полиэдра в S^n (теорема Хопфа-Уитни).

1'.* [RS' §4] Фазовое пространство пар различных точек и препятствие Ву к вложимости полиэдров и многообразий в $\mathbb{R}^m$. Инвариант Ву вложений и инвариант Масси-Ролфсена сингулярных зацеплений.

2. [RS §2] Препятствия Ван Кампена к

a)* аппроксимации вложениями путей и циклов на плоскости.

b)* планарности графов.

3. [RS §3, FF §19] Препятствия к построению

a) ориентации (первый класс Штифеля-Уитни).

b) единичного касательного векторного поля (класс Эйлера).

c) невырожденных систем векторных полей (классы Штифеля-Уитни).

d)* почти невырожденных систем векторных полей (классы Понтрягина).

4. [M, MF, PS] Элементы трехмерной топологии

a) Ложные поверхности и специальные 2-полиэдры. Формулировка теоремы Кэслера.

b)* Представление 3-многообразий оснащенными зацеплениями. Формулировка теоремы Кирби.

Литература. В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович, Наглядная топология, Наука, Москва, 1982. Эта книга покрывает материал, необходимый для понимания курса и не включенный в его программу.

[RS] Д. Реповш и А. Скопенков, Теория препятствий для начинающих, Мат. Просвещение, 4 (2000), 154–180. Эта статья покрывает бо́льшую часть курса.

[FF] А. Т. Фоменко и Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии, Наука, Москва, 1989. Эти книгу можно использовать для обобщения и углубления полученных на спецкурсе знаний.

[RS'] Д. Реповш и А. Скопенков, Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства, УМН, 54:6 (1999), 61–109.

[M] Р.Мандельбаум, Четырехмерная топология; [MF] С.В.Матвеев и А.Т.Фоменко, Алгоритмические и компьютерные методы трехмерной топологии; [PS] В.В.Прасолов и А.Б.Сосинский, Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия].

Задачи к экзамену: Из [RS §1]: 4b, 6b, 6c, 6d, 7a, 7bc, 9b (вместо '$f : K^{(3)} \to S^2$ на все K' следует читать '$f|_{K^{(2)}} : K^{(2)} \to S^2$ на все K'), 10a (вместо '$f : K^{(n+1)} \to S^n$ на все K' следует читать '$f|_{K^{(n)}} : K^{(n)} \to S^n$ на все K'; требуется доказать, что построенное препятствие пропускается через ρ_2 — приведение по модулю 2), 10b, 11ab. Всюду $n = 2$.

Из [RS §3]: 5, 6ab, 8abc, 9, 11, 12, 13, 14b для $j = 1$ и $n = 3$, 14b для $j = 1$ и $n = 4$, вычисление в теореме Хопфа.

Допуском к экзамену является сдача двух задач из списка. Для получения оценки '5 автоматом' достаточно до экзамена сдать пять таких задач. Каждая задача принимается только у одного студента (список уже принятых задач находится у А. Скопенкова, skopenko@mccme.ru). Сдачей задачи называется устный рассказ ее решения и набор или написание подробных указаний к решению на литературном языке (в этих указаниях можно ссылаться на материал статьи [RS]).

Образец сданной задачи. *Указания к задаче 5.a из §1.* Рассмотрим на проективной плоскости точку e^0 и окружность e^1, указанные на рисунке (клеточное разбиение). Любое отображение $K \to \mathbb{R}P^2$ гомотопно *клеточному*, т.е. такому, которое любую вершину графа K переводит в точку e^0. Поэтому достаточно классифицировать клеточные отображения $f : K \to S^1$ с точностью до гомотопии (отображения которой не обязательно клеточны). Так как $[S^1; \mathbb{R}P^2] \cong \mathbb{Z}_2$, то при клеточном отображении f ребра отображаются в петли двух типов: стягиваемые в точку и не стягиваемые. Препятствующая расстановка $h_f \in \mathbb{Z}_2^E$ определяется как и в доказательстве теоремы Хопфа [RS, §1].

Так как вершины графа K нульмерны, а $\mathbb{R}P^2$ является двумерным многообразием, то любая гомотопия клеточного отображения f может быть заменена на *клеточную*, т.е. такую, для которой образы вершин графа K находятся на окружности e^1. Если при клеточной гомотопии f_t отображения f_0 вершина $a_i \in K$ сделала четное число оборотов вдоль окружности e^1, то положим $n_i = 0$, а если нечетное, то положим $n_i = 1$. Кограница $\delta a \in \mathbb{Z}_2^E$ вершины $a \in K$, отношение *когомологичности*, группа $H^1(K, \mathbb{Z}_2)$ и класс $\deg f = [h_f] \in H^1(K, \mathbb{Z}_2)$ определяются как и как и в доказательстве теоремы Хопфа [RS, §1] с заменой $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}_2$. Тогда $h_{f_0} - h_{f_1} = n_1\delta a_1 + \dots + n_V \delta a_V$. Получаем, что $\deg f_0 = \deg f_1 \in H^1(K, \mathbb{Z}_2)$, т.е. отображение $\deg : [K; \mathbb{R}P^2] \to H^1(K, \mathbb{Z}_2)$ определено корректно.

Чтобы доказать инъективность отображения deg, предположим, что $\deg f = \deg g$ для некоторых клеточных отображений f и g. Тогда существуют такие числа $n_1 ... n_V \in \mathbb{Z}_2$, что $h_f - h_g = n_1\delta a_1 + \dots + n_V \delta a_V$. Поэтому искомая гомотопия между f и g заключается в "протаскивании" n_i раз каждой вершины $a_i \in K$ вдоль окружности e^1.

Чтобы доказать сюръективность отображения deg, возьмем произвольную расстановку $h \in \mathbb{Z}_2^E$. Положим $f(a) = e^0$. Если на ребре e стоит 0, то положим $f(e) = e^0$, а если 1, то в качестве $f|_e$ возьмем однократный обход вдоль окружности e^1. Для построенного клеточного отображения f имеем $h_f = h$.