Анализ-2000. 2 семестр, листок 1

1. Найдите первообразные функций

$$\text{а) } \ln t; \qquad \text{б) } \ln^2 t; \qquad \text{в) } xe^{-x}; \qquad \text{г) } \sqrt{1-x^2}.$$

Сходимость (и равномерная сходимость) несобственных интегралов определяется аналогично сходимости рядов. Пример:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx.$$

Для перестановок пределов и дифференцирования по параметру выполняются теоремы, аналогичные тем, которые рассматривались для рядов.

2. Исследуйте сходимость интегралов (в зависимости от параметров, если таковые есть)

$$\text{а) } \int_0^1 x^\alpha |\ln x|^\beta\,dx;\ \text{б) } \int_1^{+\infty} x^\alpha |\ln x|^\beta\,dx;\ \text{в) } \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx;\ \text{г) } \int_0^{+\infty} \sin(x\ln x)\,dx?$$

3. Докажите, что при $x>0$ сходятся интегралы

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^1 \ln^{x-1}\left(\frac{1}{t}\right)\,dt.$$

Проверьте, что $\Gamma(1+x) = x!$ при целом положительном x. Докажите, что $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ при $x>0$. (Попробуйте доказать все то же самое для произвольного комплексного x с положительной действительной частью.)

При решении дальнейших задач можно пользоваться равенством

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

которое будет доказано позже.

4. Докажите сходимость интеграла и найдите его значение

$$\text{а) } \int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}\ (a\neq 0); \quad \text{б) } \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx;$$

$$\text{г) } \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx; \quad \text{д) } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-ax}\,dx\ (a>0); \quad \text{е) } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

5. Функция f неотрицательна и убывает на $[1,+\infty)$. Пусть $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$. Докажите, что тогда

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f(t)\,dt + C + o(1), \quad 0\le C\le f(1).$$

6. Исследуйте сходимость рядов

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\ln n}{n}.$$

7. Докажите, что при $x>0$ существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n+x}{n} n^{-x}, \text{ где } \binom{n+x}{n} = \frac{(x+n)(x+n-1)\dots(x+1)}{n!}.$$

Проверьте, что этот предел равен $\frac{1}{x!}$ при положительных целых x.

8. а) Докажите сходимость интегралов и равенство при $\lambda > 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}} = \int_\lambda^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}.$$

б) Найдите асимтотику этих интегралов при $\lambda \to +\infty$.

9. При $A \to +\infty$ найдите асимптотику

$$\int_0^1 (1-x^2)^A \, dx.$$

Указание. Докажите и используйте неравенство

$$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le \frac{t^2}{n} e^{-t} \quad (n \ge 2;\ 0 < t < n).$$

10. f, g — непрерывные на $[a;b]$ функции, $g \ge 0$. Докажите, что найдется ξ, $a \le \xi \le b$, такое что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Обозначим через $f * g$ свертку: $\int_a^b f(t)g(x-t)\,dt$.

11. Докажите, что свертка с многочленом — многочлен.

12. Докажите, что если для некоторой функции δ и всех непрерывных f выполнено $f = f * \delta$, то $\int_a^b \delta(t)\,dt = 1$ при любых $a < 0 < b$, а также $\delta(x) = 0$ при $x \ne 0$. (Стало быть, таких функций не существует; тем не менее их можно имитировать последовательностями “настоящих” функций, см. ниже.)

13. Постройте последовательность многочленов φ_n, для которой $\varphi_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $x \ne 0$ и для любого ε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_n(x)\,dx = 1.$$

14. Пусть для непрерывной на $[0;1]$ функции f и любого целого $n > 0$

$$\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 0.$$

Докажите, что тогда $f \equiv 0$.

15. Докажите теорему Вейерштрасса: любая непрерывная на отрезке функция равномерно приближается многочленами.

Подсказка. Замените “несуществующую” δ-функцию подходящей последовательностью многочленов.