Анализ-2000. 2 семестр, листок 2

Замечание. При вычислении интегралов предлагается не стесняться и использовать здравый смысл. При этом полезно отдавать себе (и преподавателю) отчет, какие именно свойства интеграла вам требуются (доказывать эти свойства пока не обязательно).

Ниже через $I^n \subset \mathbb{R}^n$ обозначен параллелепипед (или, если угодно, куб) $[0;1] \times \cdots \times [0;1]$.

1. Вычислите

а) $\displaystyle\int_{I^2} (2x_1 + x_2)\, dx_1 dx_2$; б) $\displaystyle\int_{I^n} (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$;

$$\text{в) } \int_{I^n} x_1 x_2 \dots x_n \, dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

2. Вычислите

а) $\displaystyle\int_{I^n} \max(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$; б) $\displaystyle\int_{I^n} \min(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

3. а) Найдите объем d-мерного единичного шара ν_d при $d = 2, 3, 4$.

б) Найдите рекуррентное соотношение для последовательности ν_d.

в) Найдите (хотя бы грубую) асимптотику ν_d при $d \to \infty$.

4. 2000-мерный арбуз плоскостями, (точнее говоря, *гипер*плоскостями), параллельными экватору, порезали на 101 дольку одинаковой ширины. Какая часть арбуза попадает в среднюю дольку?

5. Докажите, что всякое метрическое пространство нормально.

Пусть P_d — пространство многочленов степени d, в котором в качестве нормы выбран максимум модулей коэффициентов.

6. Найдите норму оператора $f \mapsto f'$, действующего из пространства P_n в пространство P_{n-1}.

7. Найдите норму оператора $A\colon P_n \to P_n$, действуюшего по формуле $(Af)(x) = f(x+1)$.

8. Пусть $\varphi \in C[a;b]$. Найдите норму функционала $f \mapsto \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx$ на пространстве непрерывных на $C[a;b]$ функций с sup-нормой.

9. Тот же вопрос, что в предыдущей задаче, но с заменой sup-нормы на L^1-норму.

Дополнительные задачи

Пусть X и Y — топологические пространства (здесь и ниже все пространства предполагаются хаусдорфовыми). Через $C(X,Y)$ (или Y^X) обозначется множество всех непрерывных отображений из X в Y. Введем на $C(X,Y)$ топологию следующим образом. Пусть $K \subset X$ — компактное подмножество и $U \subset Y$ — открытое подмножество. Через $V(K,U)$ обозначим множество таких непрерывных отображений $f\colon X \to Y$, что $f(K) \subset U$. Рассмотрим на $C(X,Y)$ наименее тонкую топологию (это означает: с наименьшим набором открытых множеств), в которой все $V(K,U)$ открыты. Эта топология называется *компактно-открытой.*

10. Пусть X — компактное пространство. Покажите, что компактно-открытая топология на $C(X,\mathbb{C}) = C(X)$ совпадает с топологией равномерной сходимости (т.е. с топологией, задаваемой sup-нормой). (То же верно и с заменой $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$.)

11. Пусть X, Y и Z — топологические пространства. Постройте естественный гомеоморфизм $C(X, C(Y,Z)) \to C((X\times Y), Z)$ (в экспоненциальных обозначениях это выглядит более эффектно: $(Z^Y)^X \cong Z^{(Y\times X)}$).

12. Пусть $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, где все f_i и f лежат в $C(X,\mathbb{R})$, а сходимость имеется в виду относительно компактно-открытой топологии. Покажите, что эта сходимость имеет место тогда и только тогда, когда для всякого компактного подмножества $K \subset X$ сходимость $f_n \to f$ равномерна на K. (В силу этого обстоятельства компактно-открытую топологию на пространствах типа $C(X,\mathbb{R})$ называют еще «топология равномерной сходимости на компактах».)