Анализ-2000. 2 семестр, листок 3

1. Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — отображение, заданное формулой $(x;y) \mapsto (x^3 + xy; y)$. Найдите ранг $Df(p)$ в зависимости от $p = (x;y)$.

2. Тот же вопрос про отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $(x,y) \mapsto (xy, y)$.

3. Найдите производную отображения

$$(x;y) \mapsto \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)$$

и ее ранг.

4. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ — множество троек положительных чисел (a,b,c), являющихся сторонами некоторого треугольника, и пусть $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — отображение, ставящее в соответствие сторонам треугольника его углы. Покажите, что ранг линейного отображения $Df(p)$ равен 2 во всякой точке $p \in U$ (если получится, постарайтесь сделать это, не вычисляя в явном виде частных производных).

5. Пусть $E = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ — пространство $n\times n$-матриц, и пусть отображение $C\colon E \to E$ действует по правилу $X \mapsto X^2$. Найдите его производную $Df(A)$ в точке $A \in E$ (для искомого линейного отображения можно найти формулу, в которой не участвуют в явном виде коэффициенты матрицы).

6. Найдите условия на матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, при которых ранг отображения C из предыдущей задачи меньше 4.

7. Пусть опять $E = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, и пусть $\det\colon E \to \mathbb{R}$ — отображение, ставящее в соответствие матрице ее определитель. Пусть $I \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ — единичная матрица. Покажите, что производная отображения $\det$ в точке I есть линейный функционал $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (через Tr обозначается «след» матрицы — сумма ее диагональных элементов).

8. Отображение $\mathrm{Cf}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сопоставляет набору чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициенты многочлена $(x - x_1)\ldots(x - x_n)$. Докажите, что ранг $D\,\mathrm{Cf}$ в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ равен количеству различных чисел среди $x_1, \ldots, x_n$.

9. Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k}$, которое набору $(p_1, q_1; p_2, q_2; \ldots; p_k, q_k)$ сопоставляет коэффициенты многочлена $(x^2 + p_1x + q_1)\ldots(x^2 + p_kx + q_k)$. Найдите условия, при которых производная этого отображения имеет ранг меньше $2k$.

Дополнительные задачи

Во всех дополнительных задачах этого листка термин «топологическое пространство» означает «хаусдорфово топологическое пространство».

10. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств. Оно называется *замкнутым,* если образ всякого замкнутого подмножества в X является замкнутым подмножеством в Y (и *открытым,* если, соответственно, f переводит открытые подмножества в открытые). Приведите пример непрерывного отображения, являющегося открытым, но не замкнутым; замкнутым, но не открытым; не открытым и не замкнутым.

11. Пусть K — компактное пространство. Покажите, что для произвольного пространства X отображение $p_2\colon K \times X \to X$, действующее по формуле $(y; x) \mapsto x$, является замкнутым. (Отображение p_2 называется «проекция на второй сомножитель» — отсюда индекс 2.)

12. Пусть X — *не*компактное пространство. Покажите, что существуют компактное пространство K и точка $p \in K$, обладающие следующими свойствами:

- $K \setminus \{p\}$ плотно в K;
- X гомеоморфно $K \setminus \{p\}$.

Если $X = \mathbb{R}^2$, то чему гомеоморфно K?

13. Покажите, что пространство K компактно тогда и только тогда, когда для всякого пространства X проекция на второй сомножитель $p_2\colon K \times X \to X$ является замкнутым отображением.