Анализ-2000. 2 семестр, листок 4

1. Будем рассматривать $\mathbb{R}^n$ как евклидово пространство. *Градиентом* функции $f\colon U \to \mathbb{R}$ в точке $p \in U$ называется вектор $(\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n)$, отложенный от точки p (U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$). Обозначение: ∇f.

Покажите, что направление вектора ∇f есть направление, вдоль которого функция f быстрее всего возрастает (среди всех лучей, выходящих из точки p), а длина вектора ∇f есть производная функции f по этому направлению ($\partial_h f(x) = \lim_{t\to+0}(f(x+th) - f(x))/t$, $\|h\| = 1$, норма евклидова).

2. Пусть $\alpha > 0$ — действительное число. Функция f, определенная на $\mathbb{R}^n \setminus 0$ (или на каком-то открытом конусе с вершиной в нуле) называется *однородной степени* α, если выполнено тождество

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

Пусть f однородна степени α и гладка. Покажите, что выполнено тождество

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

3. Пусть f — однородный многочлен степени p от $x_1, \dots, x_n$, и пусть $0 < q < p$. Покажите, что для всяких чисел $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ выполнено тождество

$$\sum_{|\alpha|=q} \frac{D^\alpha F(a_1, \dots, a_n)x^\alpha}{\alpha!} = \sum_{|\beta|=p-q} \frac{a^\beta}{\beta!} D^\beta F(x_1, \dots, x_n).$$

Здесь α и β — мультииндексы, на лекциях эти обозначения были введены.

4. Пусть $P \in \mathbb{C}[X]$ — многочлен от одной переменной с комплексными коэффициентами. Отождествим $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ с помощью отображения $x + iy \mapsto (x; y)$; тогда многочлен P определяет отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ по формуле $z \mapsto P(z)$. Докажите, что производная этого отображения в точке $a \in \mathbb{C}$ — линейное отображение из $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ в себя, задаваемое умножением на комплексное число $f'(a)$.

5. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Докажите сходимость ряда

$$\exp A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

6. Найдите $\exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

7. Проверьте, что отображение $X \mapsto \exp X$ дифференцируемо (считайте, что $X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$). Найдите $D\exp(0)$, $D\exp(I)$.

8. Найдите производную отображения $\mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, задаваемого формулой $t \mapsto \exp(tA)$, $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

9. Запишите билинейную форму $D^2\exp(0)(U_1, U_2)$.

10. Проверьте свойства экспоненты

а) $\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}\exp AB$;

б) если $AB = BA$, то $\exp(A+B) = \exp A \exp B$;

в) если λ — собственное число A, то e^{λ} — собственное число $\exp A$.

11. Для функции f, определенной на открытом подмножестве в $\mathbb{R}^2$, *лапласиан* Δf задается формулой $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$. Введем на плоскости полярные координаты $(r;\varphi)$. Выразите Δf через r, φ и производные f по r и/или φ.

12. Проверьте, что в окрестности точки $(1;-1)$ условие

$$x^5 - y^5 = x - y$$

позволяет выразить y как функцию от x. Найдите разложение $y(x)$ в ряд Тейлора в окрестности 1 с точностью до $o(x^3)$.

13. Пусть f — гладкая функция на открытом подмножестве $\mathbb{R}^3$, и пусть для некоторой точки $p = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ имеем $f(p) = 0$, но $f_x(p)$, $f_y(p)$ и $f_z(p)$ от нуля отличны. Тогда по теореме о неявной функции условие $f(x,y,z) = 0$ позволяет (вблизи точки p) выразить каждую из переменных x, y и z как функцию от двух других. Упростите выражение

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

14. Найдите первые и вторые производные функции $z(x,y)$, заданной в окрестности точки $(0;0;1)$ условием

$$(3 + x^2 + y^2 + z^2)^2 - 16(x^2 + z^2) = 0.$$