Анализ-2000. 2 семестр, листок 5

1. Докажите, что
$$\int_{B_\rho} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{[0,2\pi]\times[0,\rho]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,d\varphi\,dr,$$
где $B_\rho = \{(x;y) : x^2+y^2 \le \rho^2\}$.

2. Вычислите интеграл
$$P(\alpha,\rho_1,\rho_2) = \int_{C(\rho_1,\rho_2)} r^\alpha\,dx\,dy,$$
где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, а $C(\rho_1,\rho_2) = \{(x;y) : \rho_1^2 \le x^2+y^2 \le \rho_2^2\}$. При каких α существуют пределы $\lim\limits_{\rho_1\to 0} P(\alpha,\rho_1,\rho_2)$, $\lim_{\rho_2\to\infty} P(\alpha,\rho_1,\rho_2)$?

3. Вычислите интеграл
$$N(\rho) = \int_{B_\rho} e^{-r^2}\,dx\,dy,$$
найдите $\lim\limits_{\rho\to\infty} N(\rho)$.

4. Найдите площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли, которая задается уравнением
$$(x^2+y^2)^2 = 2k^2(x^2-y^2).$$

5. Найдите производную $J(r,\varphi_1,\varphi_2)$ отображения f, задаваемого формулами
$$(r,\varphi_1,\varphi_2) \overset{f}{\mapsto} (r\cos\varphi_1, r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, r\sin\varphi_1\sin\varphi_2).$$

6. Найдите
$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{B_\rho} e^{-|x|^2}\,dx,$$
где B_ρ — шар в $\mathbb{R}^3$ радиуса ρ с центром в начале координат, $|x|$ — евклидова норма x.

7. Найдите объем, ограниченный однополостным гиперболоидом $x^2+y^2-z^2=1$ и плоскостями $z=\pm 1$.

8. n-мерный аналог полярных и сферических координат задается формулами
$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1\\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\\
x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3\\
&\dots\\
x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Найдите производную этого отображения.

9. Сформулируйте и решите многомерные аналоги задачи 2.

10. Докажите формулу для объема d-мерного шара (единичного радиуса) ν_d:

$$\nu_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)}.$$

11. Найдите

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_{B_\rho} e^{-A(x,x)}\, dx,$$

где B_ρ — шар радиуса ρ с центром в начале координат в $\mathbb{R}^n$, A — положительно определенная квадратичная форма.