Независимый Московский университет

Математический анализ, 1 курс 10 мая 2000 г.

В скобках после номера задачи указано количество очков за полное решение этой задачи. Критерии оценок будут выработаны после проверки, но заранее известно, что оценка “удовлетворительно” будет стоить $\leqslant 30$ очков, а оценка “отлично” — $\leqslant 55$ очков.

1. **(10)** Пусть $f(x,y,z)$ — функция из класса C^∞, а $\varphi(t)=f(t,t^2,t^3)$. Выразите первые четыре члена тейлоровского разложения $\varphi(t)$ в окрестности 0 через частные производные f.

2. **(10)** Является ли точка $(0;0)$ локальным экстремумом функции
$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(1+x)^2+(1-y)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+(1+y)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}}?$$
Если да, то каким?

3. **(15)** Найдите $\displaystyle\int\limits_{x^2+2y^2+3z^2\leqslant 1}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$

4. Проверьте, что в окрестности точки $(1;0)$ уравнения
$$\begin{aligned} x_1^2-y_1^2&=x_2^3-3x_2y_2^2+x_2+1\\ 2x_1y_1&=3x_2^2y_2-y_2^3+y_2\end{aligned}$$
задают функцию $f\colon (x_1,y_1)\mapsto(x_2,y_2)$, $f(1;0)=(0;0)$.

   а)**(10)** Найдите первые производные функции f в точке $(1;0)$.

   б)**(15)** Найдите вторые производные функции f в точке $(1;0)$.

5. **(20)** Пусть $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — векторное пространство $(n\times n)$ -матриц с действительными коэффициентами. Пусть $O(n)\subset\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — множество $(n\times n)$-матриц, столбцы которых образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Равносильное определение: $O(n)$ — множество матриц операторов (относительно стандартного базиса), сохраняющих скалярное произведение
$$(\,(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\,)\mapsto x_1y_1+\dots+x_ny_n.$$
Покажите, что $O(n)$ является C^∞-подмногообразием в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и найдите его размерность.

6. Пусть $S^2\subset\mathbb{R}^3$ — сфера единичного радиуса с центром в начале координат. Рассмотрим отображение $f\colon S^2\to\mathbb{R}^6$, заданное формулой
$$(x,y,z)\mapsto(x^2,y^2,z^2,xy,xz,yz).$$
Покажите, что

   а)**(10)** это отображение является иммерсией и что

   б)**(20)** $f(S^2)$ — подмногообразие в $\mathbb{R}^6$, диффеоморфное $\mathbb{R}P^2$.