Независимый Московский университет

Математический анализ, 1 курс 16 сентября 2000 г.

В скобках после номера задачи указано количество очков за полное решение этой задачи. Критерии оценок будут выработаны после проверки, но заранее известно, что оценка "удовлетворительно" будет стоить $\leqslant 35$ очков, а оценка "отлично" — $\leqslant 55$ очков.

1. (10) Найдите вторую производную отображения $f\colon t \mapsto (t, t^2, \dots, t^d)$.

2. (15) Найдите $\displaystyle\int\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ u^2+v^2\leqslant 1}} (x-u)^2 + (y-v)^2\, dx\, dy\, du\, dv.$

3. (20) Пусть $M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Найдите все локальные экстремумы функции $f\colon M \to \mathbb{R}$, заданной правилом $f(x, y, z) = xy + yz + xz$.

4. (15) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. При каком условии отображение $F\colon x \mapsto f(x)x$ имеет полный ранг?

5. (15) Является ли пересечение гладких замкнутых подмногообразий в $\mathbb{R}^n$ гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$?

6. (25) Пусть E — n-мерное евклидово проостранство. Положим

$$V = \{\, (v_1, \dots, v_k) \in E^k \mid (v_i, v_i) = 1 \ \ \forall i,\ (v_i, v_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j \,\}$$

Покажите, что V является C^∞-подмногообразием в $E^k = \mathbb{R}^{nk}$ (уточните размерность).