Лекция 12. Разбиения единицы

Все топологические пространства, о которых пойдет речь в этой лекции, предполагаются хаусдорфовыми!

Чтобы доказать предложение 11.10, нам придется совершить еще один экскурс в общую топологию. Понятия, с которыми мы познакомимся по ходу дела, важны и сами по себе.

Определение 12.1. Топологическое пространство X называется *нормальным,* если для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств $A, B \subset X$ существуют такие открытые подмножества $U, V \subset X$, что $U \supset A$, $V \supset B$ и $U \cap V = \varnothing$.

По-другому определение нормальности можно сформулировать так:

Предложение 12.2. *Топологическое пространство X нормально тогда и только тогда, когда для всяких замкнутого множества $F \subset X$ и содержащего его открытого множества $W \subset X$ существует такое открытое множество $U \subset X$, что $F \subset U \subset \overline{U} \subset W$.*

Доказательство. Если положить $A = F$, $B = X \setminus W$, это немедленно сводится к определению 12.1. $\square$

Предложение 12.3. *Всякое компактное пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X — компактное пространство. Докажем сначала такое утверждение:

> Если $B \subset X$ — замкнутое множество и $x \notin B$, то существуют такие открытые множества $U \ni x$ и $V \supset B$, что $U \cap V = \varnothing$.

В самом деле, для всякой точки $b \in B$ существуют такие открытые множества $U_b \ni x$ и $V_b \ni b$, что $U_b \cap V_b = \varnothing$ (пространства предполагаются хаусдорфовыми!). Поскольку B компактно как замкнутое подмножество компакта, имеем $B \subset V_{b_1} \cup \dots V_{b_n}$ для некоторых $b_1, \dots, b_n \in B$. Ясно, что множества $U = U_{b_1} \cap \dots \cap U_{b_n}$ и $V = V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_n}$ удовлетворяют нашему условию.

Пусть теперь A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X. По доказанному, для всякой точки $a \in A$ существуют такие открытые множества $U_a \ni a$ и $V_a \supset B$, что $U_a \cap V_a = \varnothing$. Поскольку A компактно, имеем $A = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m}$ для некоторых $a_1, \dots, a_m \in A$. Положим $U = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m}$ и $V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_m}$. Ясно, что множества U и V открытые, непересекающиеся, $U \supset A$ и $V \supset B$. $\square$

Основное свойство нормальных пространств выражается следующим предложением:

Предложение 12.4 (лемма Урысона). *Пространство X нормально тогда и только тогда, когда для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств $A, B \subset X$ существует такая непрерывная функция $f\colon X \to [0;1]$, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(x) = 1$ для всех $x \in B$.*

Функция f, о которой идет речь в формулировке этого предложения, называется *функцией Урысона* пары (A, B).

Доказательство. Часть «тогда» тривиальна: если f — функция Урысона пары (A, B), то $U = f^{-1}([0;1/2)\,)$ и $V = f^{-1}(\,(1/2;1])$ — непересекающиеся открытые множества, содержащие A и B соответственно. Содержательная часть предложения — «только тогда». Итак, пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X. Будем строить функцию Урысона следующим образом.

Положим $W = X \setminus B$. По предложению 12.2 существует такое открытое подмножество $U_{1/2} \subset X$, что $A \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset W$. Далее, применяя предложение 12.2 к парам $(A, U_{1/2})$ и $(\overline{U_{1/2}}, W)$ соответственно, найдем такие открытые подмножества $U_{1/4}$ и $U_{3/4}$, что $A \subset U_{1/4} \subset \overline{U_{1/4}} \subset U_{1/2}$ и $\overline{U_{1/2}} \subset U_{3/4} \subset \overline{U_{3/4}} \subset W$. Продолжая в том же духе, мы для каждого двоично-рационального[1] числа $r \in (0;1)$ построим открытое подмножество U_r таким образом, чтобы $A \subset U_r \subset W$ при всех r и $\overline{U_r} \subset U_{r'}$ при $r < r'$. Положим также $U_1 = X$. Определим теперь функцию f по формуле

$$f(x) = \inf\{\, r \mid x \in U_r \,\}.$$

Покажем, что f действительно является функцией Урысона.

То, что $f(X) \subset [0;1]$, $A \subset f^{-1}(0)$ и $B \subset f^{-1}(1)$, из нашего определения очевидно. Остается проверить непрерывность.

В самом деле, пусть $f(x) = c \in (0;1)$, и пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $f(x) < c + \varepsilon$, найдется такое двоично-рациональное число $r \in (c; c+\varepsilon)$, что $x \in U_r$. Далее, пусть s и s' — такие двоично-рациональные числа, что $c - \varepsilon < s < s' < c$; тогда $x \neq U_{s'}$, и тем самым $x \neq \overline{U_s}$. Положим $U = U_r \setminus \overline{U_s}$. Очевидно, U — открытое множество, $U \ni x$ и $f(U) \subset (c - \varepsilon; c + \varepsilon)$. Тем самым проверена непрерывность f на всем X, кроме множеств $f^{-1}(0)$ и $f^{-1}(1)$. Эта последняя проверка — упражнение для читателя. $\square$

Нетрудно доказать, что и всякое метрическое пространство нормально.

Теперь можно перейти к основной теме нашей лекции. Сначала — вспомогательное определение.

Определение 12.5. Пусть f — функция на топологическом пространстве X. Ее *носителем* называется замыкание множества тех точек $x \in X$, для которых $f(x) \neq 0$. Носитель функции f обозначается $\operatorname{supp} f \subset X$.

По-другому можно сказать так: $x \notin \operatorname{supp} f$ тогда и только тогда, когда f тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки x.

Напомним также, что *открытое покрытие* топологического пространства X — это такое семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, что $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$. A priori «множество индексов» A не предполагается ни конечным, ни даже счетным.

Определение 12.6. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие топологического пространства X. *Разбиением единицы,* подчиненным покрытию $\mathcal{U}$, называется семейство непрерывных функций $\{f_\beta : X \to [0;1]\}_{\beta \in B}$, удовлетворяющее таким условиям:

1) Для всякого $\beta \in B$ существует такое $\alpha \in A$, что $\operatorname{supp} f_\beta \subset U_\alpha$;

[1] Число называется *двоично-рациональным,* если оно представимо в виде $m/2^n$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

2) Для всякой точки $x \in X$ существует такое открытое множество $V \ni x$, что для всех, кроме конечного числа, $\beta \in B$, функция f_β тождественно равна нулю на V.

3) Для всякой точки $x \in X$ выполнено равенство $\sum_{\beta \in B} f_\beta(x) = 1$.

Условие (3) в этом определении имеет смысл, поскольку, ввиду условия (2), лишь конечное число слагаемых в сумме отлично от нуля.

Предложение 12.7. *Для (хаусдорфова) топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

1) *X нормально;*

2) *для каждого открытого покрытия пространства X, состоящего из* двух *множеств, существует подчиненное ему разбиение единицы.*

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1): пусть A и B — непересекаюшиеся замкнутые подмножества X, и пусть (φ, ψ) — разбиение единицы, подчиненное открытому покрытию $(X \setminus A, X \setminus B)$. Тогда функция φ будет функцией Урысона пары (A, B): она равна нулю на A (так как $\operatorname{supp} \varphi \subset X \setminus A$) и единице на B (так как $\operatorname{supp} \psi \subset X \setminus B$ и $\psi = 1 - \varphi$).

(1) $\Rightarrow$ (2): пусть $X = U \cup V$ — открытое покрытие; положим $A = X \setminus U$, $B = X \setminus V$, и пусть $f\colon X \to [0; 1]$ — функция Урысона пары (A, B). Положим $A_1 = f^{-1}([0; 1/3])$, $B_1 = f^{-1}([2/3; 1])$. A_1 и B_1 — непересекающиеся замкнутые множества; пусть $g\colon X \to [0; 1]$ — функция Урысона пары (A_1, B_1) и $h = 1 - g$. Покажем, что (g, h) — разбиение единицы, подчиненное покрытию (U, V). В самом деле, множество точек, в которых g не обращается в нуль, содержится в $f^{-1}(\,(1/3; 1]) \subset f^{-1}([1/4; 1])$; поскольку это последнее множество замкнуто, имеем $\operatorname{supp} g \subset f^{-1}([1/4; 1]) \subset X \setminus A = U$; аналогично имеем $\operatorname{supp} h \subset V$, а выполнимость остальных условий из определения разбиения единицы очевидна. $\square$

Оказывается, что для многих встречающихся в жизни пространств разбиения единицы всегда существуют. Мы докажем в этом направлении два предложения.

Предложение 12.8. *Для всякого открытого покрытия компактного пространства существует подчиненное ему разбиение единицы.*

Доказательство. Пусть X — компактное пространство. Очевидно, достаточно доказать, что существует разбиение единицы, подчиненное его *конечному* открытому покрытию $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$.

Если $n = 2$, это следует из предложения 12.7, так как компактные пространства нормальны. В общем случае проведем индукцию по n. В самом деле, пусть для всякого покрытия из $n-1$ открытого множества разбиение единицы существует, и пусть $f_1, \dots, f_{n-1}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_1, \dots, U_{n-2}, U_{n-1} \cup U_n\}$. Пусть $K = \operatorname{supp} f_{n-1} \subset U_{n-1} \cup U_n$, и пусть (g, h) — разбиение единицы на компактном пространстве K, подчиненное его покрытию $\{K \cap U_{n-1}, K \cap U_n\}$ (оно существует опять-таки по предложению 12.7). Воспользуемся такой леммой:

Лемма 12.9. *Пусть K — компактное подмножество хаусдорфова пространства X. Если $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\operatorname{supp} f \subset K$ и $g\colon K \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то функция*

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)g(x), & x \in K; \\ 0, & x \notin K \end{cases}$$

непрерывна на X.

Доказательство леммы. Непрерывность φ в точках x, для которых $f(x) > 0$ или $x \notin K$, очевидна. Пусть $x \in K$ и $f(x) = 0$. Положим $C = \max_{y\in K} |f(y)|$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество $U \subset X$, содержащее x, что $|f(p)| < \varepsilon/C$ для всех $p \in U$; тогда $|\varphi(p)| < \varepsilon$ для всех $p \in U$, что и требовалось. □

Пользуясь леммой, положим $\tilde f_{n-1}$ равным $f_{n-1}g$ на K и нулю вне K, и аналогично положим $\tilde f_n$ равным $f_{n-1}h$ на K и нулю вне K. Тогда, очевидно, $(f_1, \dots, f_{n-2}, \tilde f_{n-1}, \tilde f_n)$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $(U_1, \dots, U_n)$, что и завершает индукцию. □

Предложение 12.10. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $U = \bigcup U_\alpha$ — его открытое покрытие. Тогда на U существует* счетное *разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$.*

Доказательство. На всем протяжении предстоящего нам несколько утомительного рассуждения будет использоваться следующее обозначение: $B_a(r)$ — открытый шар радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$.

Покажем, что существует счетное покрытие $U = \bigcup_i B_{a_i}(r_i)$, обладающее следующими свойствами:

(1) Для всякого i найдется такое α, что $B_{a_i}(r_i) \subset B_{a_i}(2r_i) \subset U_\alpha$.

(2) У всякой $a \in U$ найдется окрестность, с которой пересекается лишь конечное число шаров $B_{a_i}(2r_i)$.

Для этого нам понадобится

Лемма 12.11. *Существует такая бесконечная последовательность множеств $V_1 \subset K_1 \subset V_2 \subset K_2 \subset \dots \subset U$, в которой все V_i открыты, все K_i компактны, и $\bigcup_i V_i = U$.*

Доказательство леммы. Если множество U ограничено, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим множества

$$K_n(U) = \{\, x \in U \mid \inf_{p\in\mathbb{R}^n\setminus U} d(x,p) \geqslant 1/n \,\},$$
$$V_n(U) = \{\, x \in U \mid \inf_{p\in\mathbb{R}^n\setminus U} d(x,p) > 1/n \,\}$$

(через d обозначена обычная метрика в $\mathbb{R}^n$). Без труда проверяется, что множества $V_n(U)$ открыты, множества $K_n(U)$ замкнуты в $\mathbb{R}^n$ (и тем самым компактны, так как они содержатся в ограниченном множестве U), и очевидно, что $V_n(U) \subset K_n(U) \subset V_{n+1}(U)$ для всех n, так что множества $V_n(U)$ и $K_n(U)$ — искомые.

Если же U ограниченным не является, то положим

$$K_n = K_n(U \cap B_0(n)), \quad V_n = V_n(U \cap B_0(n)).$$

Соотношения $V_n \subset K_n \subset V_{n+1}$ сохраняются и в этом случае, так что все доказано. $\square$

Пользуясь доказанной леммой, построим наши шары так: представим каждое из открытых множеств вида $U_\alpha \cap V_2$ в виде объединения таких шаров вида $B_a(r)$, что $B_a(2r)$ также содержится в $U_\alpha \cap V_2$, после чего выберем из этих шаров конечное число так, чтобы они (шары вида $B_a(r)$) покрывали компактное множество K_1; затем, представив каждое открытое множество вида $U_\alpha \cap (V_3 \setminus K_1)$ в виде объединения таких шаров вида $B_a(r)$, что $B_a(2r)$ содержится в $U_\alpha \cap (V_3 \setminus K_1)$, выберем конечное число этих шаров, покрывающих K_2, и т. д.: для каждого $i \geqslant 1$ выберем конечное число шаров, содержащихся (вместе с о своими образами относительно гомотетии с коэффициентом 2) в каких-то множествах вида $U_\alpha \cap (V_{i+2} \setminus K_i)$ и покрывающих K_{i+1}. Объединение всех отобранных таким образом шаров и есть искомое покрытие: выполнение условия (1) очевидно, а условие (2) вытекает из того, что открытое подмножество $V_{i+2} \setminus K_i \subset U$ может пересекаться лишь с шарами, отобранными на первых $i+2$ шагах нашей конструкции.

Ввиду свойства (1) достаточно построить счетное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{B_{a_i}(2r_i)\}$. Для этого нам понадобится совсем простая

Лемма 12.12. *Пусть $0 < r_1 < r_2$ и $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует непрерывная функция $h\colon \mathbb{R}^n \to [0;1]$, тождественно равная единице на $B_a(r_1)$ и тождественно равная нулю вне $B_a(r_2)(0)$.*

(доказательство предоставляется читателю).

Теперь для каждого $i \in \mathbb{N}$ пусть $\psi_i\colon \mathbb{R}^n \to [0;1]$ — существующая в силу леммы 12.12 непрерывная функция, равная единице на $B_{a_i}(r_i)$ и нулю вне $B_{a_i}(3r_i/2)$. Набор функций ψ_i — это почти то, что нужно: условие (1) из определения 12.6 вытекает из свойства (1) построенного нами семейства шаров, так как $\operatorname{supp}\psi_i \subset B_{a_i}(2r_i)$, условие (2) из определения 12.6 вытекает из свойства (2); единственное, чего не хватает, — сумма $\sum_i \psi_i$ не обязательно тождественно равна единице. Это положение мы исправим, положив $\varphi_i = \psi_i / \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \psi_j\right)$. Сумма в знаменателе нигде на множестве U не обращается в нуль, поскольку ψ_i положительно на шаре $B_{a_i}(r_i)$, а эти шары покрывают U, так что φ_i — действительно непрерывные функции из U в $[0;1]$. Ясно, что функции ψ_i образуют искомое разбиение единицы. $\square$

Замечание 12.13. Хаусдорфово пространство, на котором для всякого открытого покрытия существует подчиненное ему разбиение единицы, называется *паракомпактным.* Мы показали, что таковы всякое компактное пространство и всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$; можно показать (это уже сложнее), что и всякое метрическое пространство паракомпактно.

Построив разбиения единицы, применим их к делу.

Доказательство предложения 11.10. В силу леммы 11.3 отображение $X \to C(Y)$, заданное формулой $x \mapsto f_x$, где $f_x(y) = f(x,y)$, является непрерывным. Стало быть, ввиду компактности X, существует такое открытое покрытие $X = U_1 \cup \dots \cup U_m$, что $\|f_{x_1} - f_{x_2}\| < \varepsilon/2$, как только x_1 и x_2 содержатся в одном и том же множестве покрытия. Иными словами, $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon/2$, как только x_1 и x_2 содержатся в одном и том же U_j. Аналогично, существует такое открытое покрытие $Y = V_1 \cup \dots V_n$, что $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon/2$, как только y_1 и y_2 содержатся в одном и том же V_k. Следовательно, $|f(p) - f(q)| \leqslant \varepsilon$, как только p и q содержатся в одном и том же множестве вида $U_j \times V_k \subset X \times Y$.

Пусть теперь $g_1, \dots, g_m$ — разбиение единицы на X, подчиненное покрытию $\{U_1, \dots, U_m\}$, и $h_1, \dots, h_n$ — разбиение единицы на Y, подчиненное покрытию $\{V_1, \dots, V_n\}$. Выберем еще (произвольным образом) по точке $p_{ij} \in U_i \times V_j$ для каждого i и j, и положим $c_{ij} = f(p_{ij})$. Покажем, что $\left\| f - \sum_{i,j} f(p_{ij}) g_i \otimes h_j \right\| \leqslant 2\varepsilon$ — ввиду произвольности ε из этого будет следовать то, что нужно. Пусть $(x,y) \in U_k \times V_l \subset X \times Y$. Так как, очевидно, $\sum_{i,j} g_i(x) h_j(y) = 1$, имеем

$$f(x,y) - \sum_{i,j} f(p_{ij}) f_i(x) g_j(y) = \sum_{i,j} (f(x,y) - f(p_{ij})) f_i(x) g_j(y). \qquad (12.1)$$

Если $(U_i \times V_j) \cap (U_k \times V_l) = \varnothing$, то $f_i(x) g_j(y) = 0$, и соответствующее слагаемое в правой части равно нулю. Если же $(U_i \times V_j) \cap (U_k \times V_l) \neq \varnothing$, то выберем точку $q \in (U_i \times V_j) \cap (U_k \cap V_l)$; имеем $|f(x,y) - f(p_{ij})| \leqslant |f(x,y) - f(q)| + |f(q) - f(p_{ij})| \leqslant 2\varepsilon$. Стало быть, всякое слагаемое в правой части (12.1) либо равно нулю, либо не превосходит по модулю $2\varepsilon \cdot f_i(x) g_j(y)$ для некоторых i и j. Так как $\sum_{i,j} g_i(x) h_j(y) = 1$, модуль правой части (12.1) не превосходит 2ε, что и завершает доказательство. $\square$

Наше второе применение разбиений единицы — построение интегралов от ограниченных непрерывных функций по ограниченным открытым множествам. Для начала сформулируем

Предложение-определение 12.14. Пусть $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция с компактным носителем. Если X — параллелепипед, содержащий $\operatorname{supp} f$, то интеграл $\int_X f\, dx_1 \dots dx_n$ не зависит от выбора параллелепипеда $X \supset \operatorname{supp} f$, называется интегралом от f по $\mathbb{R}^n$ и обозначается $\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx_1 \dots dx_n$.

Формальное доказательство предоставляется читателю (заметьте, что достаточно проверить совпадение интегралов по X_1 и X_2 в случае, когда $X_1 \subset X_2$, после чего проведите индукцию по n).

Теперь все готово к формулировке такого предложения:

Предложение 12.15. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое множество и $f \colon U \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Если $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — разбиение единицы на U, у которого все φ_i имеют компактные носители, то числовой ряд*

$$\sum_i \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi_i \, dx_1 \dots dx_n \qquad (12.2)$$

абсолютно сходится, причем его сумма не зависит от выбора разбиения единицы с компактными носителями. (В правой части подразумевается, что функции φ_i, являющиеся функциями с компактным носителем на U, продолжены нулем на все $\mathbb{R}^n$.)

Определение 12.16. Сумма ряда (12.2) называется интегралом от непрерывной функции f по ограниченному открытому множеству U и обозначается $\int_U f\,dx_1\dots dx_n$.

Доказательство предложения. Так как множество U открыто, оно содержится в некотором параллелепипеде X. Пусть $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in U$. Тогда $\left|\int_{\mathbb{R}_n} f\varphi_i\,dx_1\dots dx_n\right| \leqslant \int_X M\varphi_i\,dx_1\dots dx_n = M\int_X \varphi_i\,dx_1\dots dx_n$. Поскольку $\varphi_1(x)+\dots+\varphi_m(x) \leqslant 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, всякая частичная сумма ряда, составленного из модулей членов ряда (12.2), не превосходит $M\cdot\mathrm{vol}(X)$, откуда абсолютная сходимость очевидна.

Пусть теперь $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_j\}$ — два разбиения единицы с компактными носителями. Ясно, что $\{\varphi_i\psi_j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ — также разбиение единицы на U с компактными носителями. Рассмотрим двойной ряд $\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_i\psi_j\,dx_1\dots dx_n$. В силу доказанного в предыдущем абзаце он абсолютно сходится. Стало быть, из предложения 8.10 вытекает, что его сумма совпадает с суммами $\sum_i\left(\sum_j\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_i\psi_j\right)$ и $\sum_j\left(\sum_i\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_i\psi_j\right)$. Покажем, что первая из этих сумм равна $\sum_i\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_i$, а вторая равна $\sum_j\int_{\mathbb{R}^n} f\psi_j$ — из этого все и будет следовать.

Лемма 12.17. *Пусть $f\colon X\to\mathbb{C}$ — функция с компактным носителем и $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы на X. Тогда существует такое $N\in\mathbb{N}$, что $f\varphi_i$ есть тождественный нуль при всех $n > N$.*

Доказательство леммы. У каждой точки $x \in \operatorname{supp} f$ есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом носителей функций φ_i. Поскольку $\operatorname{supp} f$ компактен, его можно покрыть конечным числом таких окрестностей. Стало быть, носители лишь конечного числа φ_i могут иметь непустое пересечение с $\operatorname{supp} f$. □

Из доказанной леммы вытекает, что для всякого $i\in\mathbb{N}$ найдется такое $N\in\mathbb{N}$, что $\varphi_i\psi_j\equiv 0$ при $j > N$ и $\varphi_i = \sum_{j=1}^N \varphi_i\psi_j$. Стало быть, в нашем двойном ряде суммы по строкам на самом деле конечны, и сумма строки с номером i равна $\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi_i$. Аналогично показывается, что сумма столбца с номером j равна $\int_{\mathbb{R}^n} f\psi_j$. Это завершает доказательство. □

Итак, определение 12.16 корректно; в частности, по ограниченному открытому множеству U можно интегрировать функцию, тождественно равную единице. То, что получится (то есть значение интеграла $\int_U dx_1\dots dx_n$), естественно считать «n-мерным объемом» множества U. Точнее говоря, это его *мера Лебега.* Будем ее обозначать $\mu(U)$.

Замечание 12.18. Меру Лебега можно определить для любого «не очень плохого» подмножества в $\mathbb{R}^n$ (в частности, для всех замкнутых множеств и всех пересечений открытых с замкнутыми). Тем не менее невозможно определить на $\mathbb{R}^n$ меру с разумными свойствами, обобщающую объем и определенную для *всех* подмножеств.

Интегралы по открытым множествам обладают свойствами, совершенно аналогичным свойствам интегралов по параллелепипедам:

Предложение 12.19. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое множество.*

1) *Если f, g — ограниченные непрерывные функции на U и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ — константы, то*
$$\int_U (\lambda f + \mu g)\, dx_1 \dots dx_n = \lambda \int_U f\, dx_1 \dots dx_n + \mu \int_X g\, dx_1 \dots dx_n.$$

2) *Для всякой ограниченной непрерывной на U функции f выполнено неравенство*
$$\left| \int_U f\, dx_1 \dots dx_n \right| \leqslant \mu(U) \cdot \sup_{x \in U} |f(x)|.$$

3) *Для всякой ограниченной непрерывной на U функции f выполнено неравенство*
$$\left| \int_U f\, dx_1 \dots dx_n \right| \leqslant \int_U |f|\, dx_1 \dots dx_n.$$

4) *Если $f, g \colon U \to \mathbb{R}$ ограничены, непрерывны, и $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \in U$, то $\int_U f\, dx_1 \dots dx_n \geqslant \int_U g\, dx_1 \dots dx_n$.*

5) *Если последовательность ограниченных непрерывных функций f_n равномерно сходится к функции f, то $\int_U f\, dx_1 \dots dx_n = \lim_{n\to\infty} \int_U f_n\, dx_1 \dots dx_n$.*

Доказательства легко получаются из предложения 11.6 и определения 12.16. Читатель без большого труда проведет их самостоятельно.

Сведе́ние кратного интеграла к повторному для интегралов по открытым множествам также работает. Для экономии места ограничимся такуой формулировкой:

Теорема 12.20. *Пусть $\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — проекция, определенная формулой $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_n$, и пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое множество. Пусть $f \colon U \to \mathbb{C}$ — ограниченная непрерывная функция; для всякого $a \in \pi(U)$ положим $U_a = U \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{a\})$, и пусть f_a — ограничение функции f на U_a. Тогда*
$$\int_U f\, dx_1 \dots dx_n = \int_{\pi(U)} \left(\int_{U_{x_n}} f_{x_n}\, dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n.$$

Доказать эту теорему имеющимися у нас средствами также нетрудно, но, видимо, лучше принять ее сейчас на веру и подождать того времени, когда вы изучите теорему Фубини в полном объеме.