Лекция 13. Нормированные пространства

В этой лекции будут важные определения, но не будет ни одной трудной теоремы. Начнем с того, что повторим определение, которое должно быть вам уже известно из курса геометрии. Для определенности мы будем работать с вещественными векторными пространствами, но все результаты этой лекции остаются верными и над полем $\mathbb{C}$.

Определение 13.1. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$. *Нормой* на V называется функция из V в $\mathbb{R}$, обозначаемая $v \mapsto \|v\|$ и удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\|v\| \geqslant 0$ для всех $v \in V$, и $\|v\| = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$.

2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ для всяких $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in V$.

3) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ для всяких $v, w \in V$.

Векторное пространство, на котором задана норма, называется *нормированным пространством.*

Определение нормированного векторного пространства над $\mathbb{C}$ — дословно такое же (надо только в условии (2) писать $\lambda \in \mathbb{C}$ вместо $\lambda \in \mathbb{R}$).

На всяком нормированном пространстве имеется естественная метрика, задаваемая по правилу $\rho(v, w) = \|v - w\|$ и, тем самым, естественная топология, задаваемая этой метрикой. В дальнейшем, говоря о нормированном пространстве, мы будем подразумевать, что на нем задана эта метрика и эта топология.

Приведем примеры нормированных пространств.

Если для $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положить $\|v\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, мы получим *евклидову норму* на $\mathbb{R}^n$ (выполнимость аксиомы (2) для нее — не очень сложное, но нетривиальное утверждение). Другая норма на $\mathbb{R}^n$ получится, если положить $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ (здесь, как и в дальнейших примерах, выполнимость всех аксиом тривиальна). В самой первой лекции в первом семестре мы проверили (не произнося слова «норма»), что обе эти нормы задают стандартную топологию на $\mathbb{R}^n$. Еще один пример нормы на $\mathbb{R}^n$ можно получить, если положить $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = |x_1| + \cdots + |x_n|$. Эта норма тоже задает стандартную топологию на $\mathbb{R}^n$, что легко увидеть непосредственно (а также будет следовать из наших дальнейших результатов).

А вот примеры норм на бесконечномерных пространствах. Пусть $C(X)$ — пространство непрерывных функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве X. Функция $f \mapsto \sup_{x \in X} |f(x)|$, которую мы всегда называли sup-нормой, является нормой на пространстве $C(X)$. Если X — отрезок на числовой оси (или, шире, параллелепипед в $\mathbb{R}^n$), то на $C(X)$ можно ввести и другую норму, по формуле $f \mapsto \int_X |f(x)|\, dx$; эта норма называется L^1-нормой. Еще важнее так называемая L^2-норма, задаваемая формулой $f \mapsto \left(\int_X |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$ (для нее проверка аксиомы (2) опять нетривиальна).

Второе (после векторного пространства) основное понятие линейной алгебры — линейное отображение. Коль скоро на наших векторных пространствах имеется топология, естественно спросить, в каких случаях линейное отображение нормированных пространств будет непрерывно. На этот вопрос имеется исчерпывающий ответ:

Предложение 13.2. *Пусть V, W — нормированные векторные пространства и $A\colon V \to W$ — линейное отображение. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(1) Отображение A непрерывно (относительно топологий, задаваемых нормами в V и W).

(2) Существует такая константа $M > 0$, что $\|A(v)\| \leqslant M\|v\|$ для всех $v \in V$.

Доказательство. В направлении (2) $\Rightarrow$ (1) все просто: если $\|A(v)\| \leqslant M\|v\|$ для всех v, то $\|A(v) - A(w)\| < \varepsilon$, как только $\|v - w\| < \varepsilon/M$, откуда непрерывность очевидна.

Чтобы доказать импликацию (1) $\Rightarrow$ (2), заметим, что, коль скоро отображение A непрерывно, оно, в частности, непрерывно и в нуле; стало быть, существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|v\| \leqslant \delta$ следует неравенство $\|A(v)\| \leqslant 1$. Теперь для всякого $v \in V$ имеем

$$A(v) = A(\delta^{-1} \cdot \|v\| \cdot \delta \cdot \|v\|^{-1} v) = \delta^{-1}\|v\| \cdot A(\delta \cdot \|v\|^{-1} v).$$

Поскольку, очевидно, $\|\delta \cdot \|v\|^{-1} v\| = \delta$, имеем $\|A(\delta \cdot \|v\|^{-1} v)\| \leqslant 1$ и $\|A(v)\| \leqslant \delta^{-1}\|v\|$, так что можно взять $M = \delta^{-1}$. □

Замечание 13.3. В доказательстве импликации (1) $\Rightarrow$ (2) использовалась только непрерывность A в нуле. Таким образом, линейное отображение нормированных пространств непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в нуле.

Ввиду условия (2) из доказанного предложения непрерывные линейные операторы (отображения нормированного пространства в себя) называют еще *ограниченными операторами.*

Если V и W — нормированные пространства и $\mathcal{L}(V, W)$ — множество непрерывных линейных отображений из V в W, то легко видеть, что $\mathcal{L}(V, W)$ является векторным пространством. Если для $A \in \mathcal{L}(V, W)$ положить $\|A\| = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \|A(v)\|/\|v\|$, то функция $\|\cdot\|$ окажется нормой на $\mathcal{L}(V, W)$ (само число $\|A\|$ при этом называется *нормой* линейного отображения A). Нам этот факт не понадобится; заинтересованный читатель легко проведет требуемые проверки самостоятельно.

Как видно из наших примеров, на одном и том же векторном пространстве можно задавать различные нормы. Естественный вопрос в связи с этим: в каких случаях две нормы задают одну и ту же топологию? На этот вопрос также имеется полный ответ:

Определение 13.4. Две нормы на векторном пространстве называются *эквивалентными,* если они задают на этом пространстве одну и ту же топологию.

Предложение 13.5. *Пусть V — векторное пространство, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы на нем. Эти нормы эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие положительные числа m и M, что $m\|v\|_1 \leqslant \|v\|_2 \leqslant M\|v\|_1$ для всех $v \in V$.*

Доказательство. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ задают на V одну и ту же топологию тогда и только тогда, когда тождественное отображение $(V, \|\cdot\|_1) \to (V, \|\cdot\|_2)$ является гомеоморфизмом. (топологии на V в левой и правой частях заданы соответствующими нормами). Поскольку это отображение автоматически взаимно однозначно, условие заключается в том, что отображения слева направо и справа налево должны быть непрерывны.

В силу предложения 13.2 отображение слева направо непрерывно тогда и только тогда, когда существует такое $M > 0$, что $\|v\|_2 \leqslant M\|v\|_1$ для всех $v \in V$, а обратное к нему отображение справа налево непрерывно тогда и только тогда, когда существует такое $C > 0$, что $\|v\|_1 \leqslant C\|v\|_2$ для всех $v \in V$, или, что эквивалентно, когда для всех v имеем $m\|v\|_1 \leqslant \|v\|_2$, где $m = c^{-1}$. Это и есть наше предложение. □

Доказанные до сих пор утверждения были, в силу своей большой общности, достаточно просты. Следующее предложение более содержательно.

Предложение 13.6. *На конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Поскольку всякое конечномерное пространство изоморфно $\mathbb{R}^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, можно сразу считать, что речь идет о нормах на $\mathbb{R}^n$. Очевидно, достаточно доказать, что любая норма на $\mathbb{R}^n$ эквивалентна евклидовой. Пусть $\|\cdot\|$ — евклидова норма и $\|\cdot\|_?$ — произвольная норма на $\mathbb{R}^n$. Покажем сначала, что функция $v \mapsto \|v\|_?$ непрерывна относительно стандартной топологии на $\mathbb{R}^n$. В самом деле, пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ и $M = \max_i(\|e_i\|_?)$. Если $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, то

$$\|v\|_? \leqslant |x_1| \cdot \|e_1\|_? + \dots + |x_n| \cdot \|e_n\|_? \leqslant nM \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leqslant nM \cdot \|v\|.$$

Стало быть, $|\,\|v\|_? - \|w\|_?\,| \leqslant \varepsilon$, как только $\|v - w\| \leqslant \varepsilon/nM$, что и доказывает непрерывность.

Поскольку множество $S^{n-1} = \{\, v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1 \,\}$ компактно в стандартной топологии, функция $v \mapsto \|v\|_?$ достигает на S^{n-1} наибольшего значения M и наименьшего значения m; поскольку норма ненулевого вектора отлична от нуля, имеем $m > 0$. Так как для всякого $v \neq 0$ имеем $\|v\|^{-1}v \in S^{n-1}$, получаем, для всякого ненулевого v,

$$m \leqslant \|v\|^{-1} \cdot \|v\|_? \leqslant M \;\Leftrightarrow\; m\|v\| \leqslant \|v\|_? \leqslant M\|v\|,$$

что и означает, ввиду предложения 13.5, эквивалентность норм. □

Пример 13.7. Без предположения конечномерности предложение 13.6 было бы неверно. В самом деле, если нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на векторном пространстве эквивалентны, то совпадают как множества последовательностей, сходящихся относительно $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ (поскольку эти нормы задают одну и ту же топологию), так и множества последовательностей, фундаментальных относительно $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ (поскольку ввиду предложения 13.5 эти нормы оцениваются одна через другую). Стало быть, если две нормы на пространстве эквивалентны, то оно либо полно относительно обеих норм, либо неполно относительно обеих норм. А теперь рассмотрим пространство $C[a;b]$. Оно полно относительно sup-нормы (предложение 6.6), но не относительно L^1-нормы (такая задача была у вас на февральском экзамене). Стало быть, sup-норма и L^1-норма на $C[a;b]$ не эквивалентны.

Замечание 13.8. Возвращаясь к конечномерным пространствам, отметим следующее. Если V — конечномерное векторное пространство и $f\colon V \to \mathbb{R}$ — какая-то функция, то, записывая утверждения наподобие $|f(v)| = o(\|v\|)$, можно не уточнять, какая именно норма имеется в виду в правой части: ввиду предложения 13.6 истинность этого утверждения от выбора конкретной нормы не зависит. Отметим также, что конечномерное векторное пространство полно относительно любой своей нормы: полнота относительно евклидовой нормы была установлена в прошлом семестре, а из обсуждения в примере 13.7 вытекает, что при замене нормы на эквивалентную полнота пространства не теряется.

Следующее предложение также отражает специфику конечномерных пространств.

Предложение 13.9. *Всякое линейное отображение конечномерных нормированных пространств является непрерывным.*

Доказательство. Ввиду предложения 13.6 можно считать, что задано линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, а нормы на обоих пространствах определены как максимум модулей координат. Пусть отображение A задается $n \times m$-матрицей (a_{ij}). Положим $C = \max_{i,j} |a_{ij}|$. Если $v = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, то i-тая координата вектора Av равна $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$., а ее абсолютная величина не превосходит

$$|a_{i1}| \cdot |x_1| + \dots + |a_{in}| \cdot |x_n| \leqslant nC \cdot \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = nC \cdot \|v\|.$$

Поскольку это же неравенство выполняется для любой координаты Av, имеем $\|Av\| \leqslant nC \cdot \|v\|$, и отображение A непрерывно ввиду предложения 13.2. $\square$

Линейные отображения бесконечномерных пространств быть непрерывными уже не обязаны. Приведем такой (с неизбежностью глупый)

Пример 13.10. Пусть $V = C[0;1]$ с sup-нормой и $W = \mathbb{R}$ (одномерное пространство). Построим разрывное линейное отображение $A\colon V \to \mathbb{R}$ следующим образом. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию $f_n \in V$, заданную формулой $f_n(x) = x^n/2^n$. Функции $f_1, f_2, \dots$ линейно независимы (так как многочлен хотя бы с одним ненулевым коэффициентом не может обращаться в нуль на целом отрезке). Линейно независимое множество функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно дополнить до базиса пространства V (имеется в виду базис в алгебраическом смысле). Как известно, линейное отображение полностью определяется своими значениями на элементах базиса, причем эти значения можно задавать произвольно; положим $A(f_n) = n$, и зададим какие-нибудь (все равно какие) значения A на остальных элементах базиса. Поскольку $f_n \to 0$ в sup-норме, а последовательность $1, 2, \dots, n, \dots$ к нулю вовсе не стремится, отображение A разрывно в нуле (нетрудно понять, что и в любой другой точке пространства V).

В заключение приведем простой технический результат, верный как для конечномерных, так и для бесконечномерных пространств.

Предложение 13.11. *Пусть $A\colon V \to W$ — линейное отображение нормированных векторных пространств. Если $\|A(v)\| = o(\|v\|)$ при $v \to 0$, то A есть тождественный нуль.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что найдется такой $v \in V$, что $Av = w \neq 0$. Так как $\|A(v)\| = o(\|v\|)$, имеем, в частности, $\|A(tv)\| = o(|t| \cdot \|v\|)$ при $t \to 0$. Однако же $\|A(tv)\| = |t|\|w\|$, и при $\|w\| \neq$ это выражение не может стремиться к нулю быстрее, чем t в первой степени — противоречие. $\square$