Лекция 19. Многообразия

В этой лекции не будет ни одной трудной теоремы. Наша цель — объяснить, что такое *гладкое многообразие.*

Зафиксируем до конца лекции некоторое r, где буква r обозначает либо целое положительное число, либо символ ∞. Всюду в дальнейшем тексте слова «диффеоморфизм» или «гладкое отображение» будут обозначать «диффеоморфизм класса C^r» или «гладкое отображение класса C^r».

Предложение 19.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое подмножество и $k \leqslant n$ — натуральное число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Для всякой точки $x \in X$ существует содержащее ее открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\varphi\colon U \to V$, где $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, обладающий тем свойством, что*

$$\varphi(X \cap U) = \{(y_1, \dots, y_n) \in V \mid y_{k+1} = \dots = y_n = 0\}.$$

(2) *Для всякой точки $x \in X$ существуют содержащее ее открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ и гладкие функции $f_1, \dots, f_{n-k}\colon U \to \mathbb{R}$, обладающие следующими свойствами:*

- $X \cap U = \{\, p \in X \mid f_1(p) = \dots = f_{n-k}(p) = 0 \,\}$.
- *Функционалы $Df_1(x)$, ... , $Df_{n-k}(x)$ линейно независимы.*

(3) *Для всякой точки $x \in X$ существуют содержащее ее открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$, открытое подмножество $W \subset \mathbb{R}^k$ и взаимно однозначная иммерсия $\psi\colon W \to \mathbb{R}^n$, обладающая тем свойством, что $\psi(W) = X \cap U$.*

Докажем эквивалентность этих трех условий «по кругу».

(1) $\Rightarrow$ (2). В обозначениях (1) пусть $y_j\colon V \to \mathbb{R}$ — j-я координатная функция. Положим $f_1 = y_{k+1} \circ \varphi$, $f_2 = y_{k+2} \circ \varphi$, ... , $f_{n-k} = y_n \circ \varphi$. Гладкость функций f_i и равенство

$$X \cap U = \{\, p \in X \mid f_1(p) = \dots = f_{n-k}(p) = 0 \,\}$$

очевидны; поскольку функционалы $Dy_j(\varphi(p))$ линейно независимы с очевидностью, $Df_l(p) = Dy_{k+l}(\varphi(p)) \circ D\varphi(p)$, и линейное отображение $D\varphi(p)$ является линейным изоморфизмом, линейная независимость функционалов $Df_l(p)$ также ясна. $\square$

При наборе использовался макропакет XY-pic.

$(2) \Rightarrow (3)$. По условию, ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

равен $n-k$. Стало быть, один из ее $(n-k)\times(n-k)$-миноров отличен от нуля. Для упрощения обозначений будем считать, что этот ненулевой минор образован первыми $n-k$ столбцами. Положим еще $x = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда по теореме о неявной функции (теорема 16.3) существуют открытые подмножества $W \subset \mathbb{R}^k$ и $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ и гладкое отображение $\varphi\colon W \to V$, обладающие следующими свойствами: $W \ni (a_{n-k+1}, \dots, a_n)$, $V \ni (a_1, \dots, a_{n-k})$, $V \times W \subset U$, и, наконец, для всякой точки $(w, v) \in W \times V$ равенства $f_1(w, v) = \dots = f_{n-k}(w, v) = 0$ выполнены тогда и только тогда, когда $w = \varphi(v)$. Теперь очевидно, что отображение $w \mapsto (w, \varphi(w))$ из W в $\mathbb{R}^n$ является искомой иммерсией (причем в роли U из условия (3) выступает $V \times W$). $\square$

$(3) \Rightarrow (1)$. Пусть иммерсия $\psi\colon W \to \mathbb{R}^n$ записывается в координатах формулой

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto (\psi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_k)).$$

Из условия ясно, что один из $k \times k$-миноров матрицы $\big(\partial\psi_i/\partial x_j\big)(x)$ отличен от нуля в точке $w = \psi^{-1}(x)$ (а стало быть, и в ее окрестности). Чтобы не утяжелять обозначения, предположим, что этот минор образован первыми k строками. Рассмотрим теперь отображение $\Psi\colon W \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$, определенное по формуле

$$(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \mapsto$$
$$(\psi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \psi_k(x_1, \dots, x_k), \psi_{k+1}(x_1, \dots, x_k) + x_{k+1}, \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_k) + x_n).$$

Легко видеть, что его якобиан в точке $v = (w, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k})$ отличен от нуля.

Следовательно, по теореме об обратной функции отображение Ψ является диффеоморфизмом на свой образ в некоторой окрестности $V \ni w$, причем ясно, что

$$\Psi(\{(x_1, \dots, x_n) \in W \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}) = \Psi(V) \cap X.$$

$\square$

Определение 19.2. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее любому из эквивалентных условий (1)–(3), перечисленных в предложении 19.1, называется *(вложенным) k-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ (класса C^r)* (см. начало лекции по поводу выбора значения символа r).

Приведем два примера многообразий.

Первое из наших многообразий называется *n-мерной сферой* и обозначается S^n. По определению, n-мерная сфера — это множество точек в $\mathbb{R}^{n+1}$ с евклидовой метрикой, находящихся на расстоянии 1 от начала координат. Иными словами,

$$S^n = \{\, (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\,\}.$$

Чтобы убедиться, что S^n действительно является подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+1}$, положим $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$. Ясно, что во всякой точке x, отличной от начала координат, хотя бы одна из частных производных функции f отлична от нуля и, стало быть, $Df(x) \neq 0$. Тем самым подмножество $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ удовлетворяет условиям пункта (2) предложения 19.1 (с $n+1$ в роли n и n в роли k). Отметим, что S^n является многообразием класса C^∞ (и тем самым C^r для любого r), поскольку функция f бесконечно дифференцируема.

Второе из наших многообразий называется *специальной линейной группой* и обозначается SL_n. Оно строится следующим образом. Обозначим через $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ n^2-мерное векторное пространство $n \times n$-матриц с действительными коэффициентами. По определению, SL_n (точнее говоря, $SL_n(\mathbb{R})$) — подмножество в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, состоящее из матриц с определителем 1. Это множество, очевидно, является группой по умножению, откуда и название (буква S в символе SL_n означает «специальная», а буква L — «линейная»).

Проверим, что SL_n — подмногообразие в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Обозначим через $f\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ функцию, ставящую в соответствие матрице X число $\det X - 1$. Если $I \in SL_n \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — единичная матрица, то, как нетрудно проверить (такая задача была у вас в листках), $Df(I)$ есть линейный функционал, ставящий в соответствие матрице ее след. Поскольку не у всякой матрицы след равен нулю, функционал $Df(I)$ не есть тождественный нуль; следовательно, $Df(g)$ не есть тождественный нуль и для всех g из некоторой окрестности I. Теперь из эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (2) в предложении 19.1 (а точнее говоря, из доказательства этого предложения) вытекает, что существуют окрестность начала координат $V \subset \mathbb{R}^{n^2}$, окрестность единичной матрицы $U \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и диффеоморфизм $\psi\colon V \to U$, обладающий тем свойством, что

$$\psi(\,\{(x_1, \dots, x_{n^2}) \in V \mid x_1 = 0\}\,) = U \cap SL_n. \tag{19.1}$$

Стало быть, SL_n является «многообразием в окрестности I». Чтобы убедиться, что SL_n является многообразием всюду, можно было бы (что нетрудно) проверить, что $Df(g) \neq 0$ в любой точке $g \in SL_n$; для разнообразия мы пойдем по другому пути. Именно, для всякой $g \in SL_n$ рассмотрим отображение $T_g\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, заданное формулой $m \mapsto gm$ (это отображение называется *левым сдвигом на g*). Очевидно,

T_g — линейное отображение, и даже линейный изоморфизм (поскольку $T_{g^{-1}}$ обратно к T_g). Ясно также, что $T_g(SL_n) = SL_n$. Теперь для всякой точки $g \in SL_n$ положим $U_g = T_g(U)$ и $\psi_g = T_g \circ \psi$, где U и ψ имеют тот же смысл, что в формуле (19.1). Из построения ясно, что ψ_g — диффеоморфизм, $U_g \ni g$ и

$$\psi_g(\,\{(x_1, \dots, x_{n^2}) \in V \mid x_1 = 0\}\,) = U_g \cap SL_n.$$

Стало быть, $SL_n \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (1) предложения 19.1 и тем самым является подмногообразием в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Это многообразие также, очевидно, принадлежит классу C^∞.

С многообразиями можно делать более или менее всё то же самое, что мы делали с открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$: можно рассматривать гладкие функции на многообразиях и гладкие отображения из одного многообразия в другое, можно эти отображения дифференцировать, и т. п. Теория при этом получается более интересная (по той простой причине, что многообразий гораздо больше, чем областей в $\mathbb{R}^n$), но соответствующие понятия надо правильно определить. Анализу на многообразиях будет посвящен весь следующий семестр, а в оставшееся у нас время мы сделаем в этом направлении самые первые шаги: определим, что такое гладкие отображения многообразий и (на следующей лекции) как эти отображения дифференцировать.

Определение 19.3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — вложенное k-мерное подмногообразие, и пусть $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, а $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ — диффеоморфизм на открытое множество $\widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, обладающий тем свойством, что $\widetilde{\varphi}(X \cap \widetilde{U}) = V$, где

$$V = \{(y_1, \dots, y_n) \in \widetilde{V} \mid y_{k+1} = \dots = y_n = 0\,\}$$

(как в пункте (1) предложения 19.1). Тогда открытое подмножество $U = \widetilde{U} \cap X$ называется *координатной окрестностью* в многообразии X, а ограничение $\varphi = \widetilde{\varphi}|_U\colon U \to V$ называется *локальной картой,* соответствующей этой окрестности.

Замечание 19.4. Из определения ясно, что каждая локальная карта $\varphi\colon U \to V$ является гомеоморфизмом.

Смысл локальных карт в том, что они задают на многообразиях системы координат; при этом в большинстве интересных случаях задать «глобальную» систему координат (то есть устроить так, чтобы $U = X$) не удается: координаты можно ввести только локально, на открытых подмножествах, покрывающих в совокупности все многообразие. Например, одной локальной картой заведомо нельзя обойтись для компактного многообразия (скажем, для сферы): ведь компактное топологическое пространство не может быть гомеоморфным открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$.

Различные системы координат (иными словами, локальные карты) обладают следующим свойством согласованности:

Предложение 19.5. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерное подмногообразие, и пусть $\varphi_1\colon U_1 \to V_1$ и $\varphi_2\colon U_2 \to V_2$ — две локальные карты. Если $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, то отображение*

$$\varphi_{12}\colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

заданное формулой $x \mapsto \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом (открытых подмножеств в $\mathbb{R}^k$).

Доказательство. То обстоятельство, что φ_{12} — гомеоморфизм, очевидно ввиду замечания 19.4: отображения $\varphi_1|_{U_1\cap U_2}$ и $\varphi_2|_{U_1\cap U_2}$ являются гомеоморфизмами на свой образ. Надо, стало быть, только проверить гладкость отображения φ_{12} (ввиду симметрии гладкость обратного к нему отображения φ_{21} проверяется точно так же). Для этого обратимся к определениям. Пусть $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$, $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$, $\widetilde{\varphi}_1$ и $\widetilde{\varphi}_2$ имеют тот же смысл, что в определении 19.3. Поскольку отображения $\widetilde{\varphi}_1\colon \widetilde{U}_1 \to \widetilde{V}_1$ и $\widetilde{\varphi}_2\colon \widetilde{U}_2 \to \widetilde{V}_2$ являются диффеоморфизмами открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$, отображение

$$\widetilde{\varphi}_{12}\colon \widetilde{\varphi}_1(\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2) \to \widetilde{\varphi}_2(\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2),$$

заданное формулой $x \mapsto \widetilde{\varphi}_2(\widetilde{\varphi}^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом (и тем более гладким). Поскольку φ_{12} является ограничением $\widetilde{\varphi}_{12}$ на пересечение $\varphi_1(\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2)$ с $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, это ограничение также является гладким. $\square$

Предложение-определение 19.6. Пусть X и Y — многообразия и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Отображение f называется *гладким,* если выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

(1) Для всякой точки $x \in X$ существуют такие координатные окрестности $U \ni x$ и $U' \ni f(x)$ и локальные карты $\varphi\colon U \to V$ и $\varphi'\colon U' \to V'$, что отображение $g = \varphi' \circ f|_{U\cap f^{-1}(U')} \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap f^{-1}(U'))}$ является гладким (см. диаграмму):

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] & Y \\
U \arrow[ur, hook] \arrow[d, "\varphi"] & U \cap f^{-1}(U') \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[u, hook'] \arrow[d, "\varphi'"] \\
V & \varphi(f^{-1}(U')) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "g"] & V'
\end{tikzcd}$$

(2) Для всякой точки $x \in X$ и *любых* координатных окрестностей $U \ni x$ и $U' \ni f(x)$ с локальными картами $\varphi\colon U \to V$ и $\varphi'\colon U' \to V'$ отображение $\varphi' \circ f|_{U\cap f^{-1}(V)} \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap f^{-1}(V))}$ является гладким.

В частности, если $Y = \mathbb{R}$, получаем определение *гладкой функции* на многообразии X.

Доказательство получается непосредственно с использованием того, что замена координат гладка (предложение 19.5).

Определение 19.7. Отображение $f\colon X \to Y$ двух гладких многообразий называется *диффеоморфизмом,* если оно гладко, взаимно однозначно, и обратное к нему отображение $f^{-1}\colon X \to Y$ также гладко.

В определении гладкого отображения мы пользовались только локальными картами на многообразии, не апеллируя к вложению в какое-нибудь $\mathbb{R}^n$. Это наводит на мысль дать более общее определение многообразия, исключительно в терминах локальных карт. Вот как это определение выглядит.

Определение 19.8. *Абстрактным k-мерным гладким многообразием* называется хаусдорфово топологическое пространство X со счетной базой, наделенное следующей дополнительной структурой:

(1) X представлено в виде объединения открытых подмножеств U_α, называемых *координатными окрестностями.*

(2) Для каждой координатной окрестности U_α задан гомеоморфизм $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to V_\alpha$, где $V_\alpha \subset \mathbb{R}^k$ — открытое подмножество (эти гомеоморфизмы называются *локальными картами*).

(3) Пусть U_α и U_β — две координатные окрестности с непустым пересечением. Тогда отображение

$$\varphi_{\alpha\beta}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

заданное формулой $x \mapsto \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x))$, является диффеоморфизмом открытых подмножеств в $\mathbb{R}^k$.

Предложение 19.5 (вкупе с тем очевидным обстоятельством, что любое подмножество в $\mathbb{R}^n$ является хаусдорфовым пространством со счетной базой) показывает, что всякое гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ является абстрактным гладким многообразием.

Гладкое отображение двух абстрактных гладких многообразий определяется дословно так же, как для подмногообразий в евклидовых пространствах, с помощью определения 19.6: ведь в этом определении ничего, кроме локальных карт, не используется. Определение диффеоморфизма абстрактных многообразий также дословно совпадает с определением 19.7.

Понятие абстрактного многообразия (определение 19.8) выглядит более общим, чем понятие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ (определение 19.2).

На самом деле, однако, эти понятия совершенно равносильны: можно показать, что всякое абстрактное гладкое k-мерное многообразие диффеоморфно многообразию, вложенному в $\mathbb{R}^n$ при некотором n. Эту теорему мы доказывать не будем. Отметим только, что без предположений хаусдорфовости или счетной базы в определении 19.8 она была бы неверна. Доказательство этой теоремы для случая компактных многообразий можно прочитать во втором томе учебника В. А. Зорича «Математический анализ» или в книге Б. А. Дубровина, С. П. Новикова и А. Т. Фоменко «Современная геометрия». Доказательство в общем случае основано на тех же идеях, но технически сложнее; оно содержится, например, в довольно тяжелой для чтения книге В. А. Рохлина и Д. Б. Фукса «Начальный курс топологии».

Хотя определение 19.8 ничего нового и не дает, не следует считать его «архитектурным излишеством»: во многих случаях многообразие естественно определять именно как абстрактное; выбор конкретного вложения в $\mathbb{R}^n$ при этом не важен и может даже создать лишние трудности. В заключение лекции рассмотрим важный пример многообразия, которое естественно определять исходя из определения 19.8. Речь идет о *вещественном проективном пространстве.*

Напомним, что n-мерное вещественное проективное пространство, обозначаемое $\mathbb{R}P^n$, *как множество* представляет собой совокупность прямых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через начало координат. Поэтому, чтобы задать такую прямую (то есть точку в $\mathbb{R}P^n$), достаточно задать любую точку этой прямой, отличную от начала координат; координаты этой точки называются *однородными координатами* точки проективного пространства. При записи однородных координат их принято отделять не запятыми, а двоеточиями. Однородные координаты $(x_0 : \cdots : x_n)$ и $(x'_0 : \cdots : x'_n)$ задают одну и ту же точку проективного пространства тогда и только тогда, когда $x'_j = \lambda x_j$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и для всех целых $j \in [0; n]$.

Определим теперь в $\mathbb{R}P^n$ координатные окрестности. Именно, для каждого целого $i \in [0; n]$ положим

$$U_i = \{\, (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0 \,\}.$$

В качестве локальной карты, соответствующей координатной окрестности U_i, рассмотрим отображение $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto \Big(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\Big).$$

Легко видеть, что отображение φ_i корректно определено и взаимно однозначно.

Проверим теперь согласованность локальных карт (иными словами, гладкость замены координат при переходе от одной локальной карты к другой). Пусть $0 \leqslant i < j \leqslant n$. Тогда легко видеть, что

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid y_{j-1} \neq 0\},$$
$$\varphi_j(U_i \cap U_j) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_i \neq 0\}.$$

Поскольку точка $(y_1, \ldots, y_n) \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$ является образом точки $(y_1 : \cdots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \cdots : y_n) \in \mathbb{R}P^n$ при отображении φ_i, а образ этой последней при отображении φ_j есть, очевидно,

$$\Bigl(\frac{y_1}{y_j}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \ldots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \ldots, \frac{y_n}{y_j}\Bigr).$$

Стало быть, отображение φ_{ij} действительно является диффеоморфизмом, и $\mathbb{R}P^n$ удовлетворяет определению многообразия (класса C^∞).

Читатель, наверное, уже заметил пробел в наших рассуждениях: мы ввели на $\mathbb{R}P^n$ локальные карты, но ни словом не обмолвились о топологии. Чтобы все было аккуратно, определим топологию на $\mathbb{R}P^n$ так: множество $W \subset \mathbb{R}P^n$ считается открытым, если для всякого целого $i \in [0; n]$ множество $\varphi_i(W \cap U_i)$ открыто в $\mathbb{R}^n$. Теперь остается проверить, что φ_i — не просто взаимно однозначные отображения, но гомеоморфизмы, а также что $\mathbb{R}P^n$ с этой топологией — хаусдорфово пространство со счетной базой. Все эти проверки оставляются читателю. Постарайтесь также доказать, что $\mathbb{R}P^n$ компактно (указание: покажите, что $\mathbb{R}P^n$ есть образ S^{n+1} при непрерывном отображении).

В заключение отметим, что не следует испытывать угрызения совести по тому поводу, что мы дали определение многообразия класса C^r при любом $r \geqslant 1$, но во всех наших примерах получались многообразия класса C^∞. Дело в том, что для всякого многообразия X класса C^r, где $r \geqslant 1$, существует многообразие Y класса C^∞ и C^r-диффеоморфизм $f\colon X \to Y$. Доказательство этого факта можно найти в цитированной выше книге Рохлина и Фукса.