Комплексное дифференцирование

Задача 1. Докажите, что если f дифференцируема, то
a) $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$; b) выполнены **условия Коши–Римана**: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Введем на $\mathbb{R}^2$ координаты $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Задача 2. Выразите $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ через частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Задача 3. Пусть f $\mathbb{R}$-дифференцируема и удовлетворяет условиям Коши–Римана. Тогда, как функция из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{C}$, f удовлетворяет равенствам: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ и $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$. Выведите отсюда, что f дифференцируема (как функция из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$).

Задача 4. Докажите, что функция $\mathbb{C}$-дифференцируема тогда и только тогда, когда она $\mathbb{R}$-дифференцируема и удовлетворяет условиям Коши–Римана.

Задача 5. Если существует $f'(z_0) \neq 0$, то f сохраняет величину и направление угла между кривыми, проходящими через z_0.

Отображение, сохраняющее углы между кривыми в точке z_0, называется **конформным** в этой точке.

Задача 6. Докажите, что $\mathbb{R}$-дифференцируемое отображение, конформное в точке z_0, дифференцируемо в этой точке.

Интегралом от функции f по кривой γ называется $\int\limits_\gamma f\,dz = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$.

Задача 7. Найдите $\int\limits_\gamma f\,dz$, если $f(z) = (z-a)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$, а γ – окружность радиуса r с центром в точке a.

Задача 8. Докажите, что $|\int\limits_\gamma f\,dz| \leqslant \int\limits_\gamma |f|\,|dz|$, где $|dz| = |z'(t)|dt$. В частности, если $|f(z)| \leqslant M$, то $|\int\limits_\gamma f\,dz| \leqslant M|\gamma|$.

Функция называется **голоморфной** в области D, если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$.

Теорема Коши. Пусть f голоморфна в области D, а $\gamma \subset D$ — замкнутый путь, гомотопный нулю. Тогда $\int\limits_\gamma f\,dz = 0$.

Задача 9. (Частный случай теоремы Коши). Предположим, что $f'(z)$ непрерывна в D. Докажите, что форма $f(z)dz$ замкнута. Используя формулу Стокса, выведите отсюда теорему Коши.

Задача 10. а) Пусть f голоморфна в замыкании односвязной области D. Докажите, что $\int\limits_{\partial D} f\,dz = 0$.

б) Верно ли то же самое для неодносвязной области (интеграл берется по ориентированной границе)?

Первообразной функции $f(z)$ в области D называется голоморфная в D функция $F(z)$ такая, что $F'(z) = f(z)$.

Задача 11. Пусть $f(z)$ голоморфна в односвязной области D.

а) Докажите, что $f(z)$ имеет первообразную в D.

б) Докажите, что для любого пути $\gamma \in D$ с началом в точке a и концом в b верно

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = F(b) - F(a).$$

Определим комплексную экспоненту $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n$.

Задача 12. а) Докажите, что этот предел существует для любого $z \in \mathbb{C}$.
(Указание: найдите $\lim\limits_{n\to\infty} |(1 + \frac{z}{n})^n|$ и $\lim\limits_{n\to\infty} arg\{(1 + \frac{z}{n})^n\}$.)

б) Докажите, что e^z голоморфна на всей комплексной плоскости и найдите ее производную.

Задача 13. Нарисуйте, во что переходит координатная сетка (декартовых и полярных координат) при отображениях $w = z^2$, $w = 1/(z-1)$, $w = e^z$.

Задача 14. Нарисуйте образ при отображении $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ окружности, проходящей через точки 1 и -1 и пересекающей ось абсцисс под углом α. Куда переходит при этом соответствующий круг и его внешняя часть ?

Задача 15. Пусть $f(z)$ голоморфна в области D. Докажите, что $\bar{f}(\bar{z})$ голоморфна в области $\overline{D}$.

Задача 16. Пусть $f = u + iv$, причем $au + bv = 0$. Докажите, что $f = const$.