Степенные ряды

Теорема (**интегральная формула Коши**).
Пусть f голоморфна в замыкании компактной области D, ограниченной конечным числом кривых. Тогда для любой точки $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Задача 1. Пусть f голоморфна в замыкании компактной области D. Докажите, что если $z \notin G$, то $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$.

Задача 2. Докажите **теорему о среднем**:
Значение в точке z голоморфной функции f равно ее среднему значению на любой достаточно малой окружности с центром в z, т.е.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it})\, dt.$$

Задача 3. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ c_n \in \mathbb{C}$, а $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$.

а) Докажите, что $f(z)$ сходится абсолютно на $D = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - z_0| < R\}$ и расходится на $D = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - z_0| > R\}$.

б) Докажите, что $f(z)$ сходится равномерно на любом компакте $K \subset D$.

Докажем, что сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ c_n \in \mathbb{C}$, голоморфна в круге его сходимости.

Задача 4. Пусть $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1},\ c_n \in \mathbb{C}$.

а) Докажите, что радиус сходимости функции φ равен радиусу сходимости функции f.

б) Докажите, что для любого треугольника Δ, лежащего в круге сходимости, $\int\limits_{\partial \Delta} \varphi(z)\, dz = 0$.

в) Докажите, что функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ c_n \in \mathbb{C}$ в каждой точке z круга сходимости имеет производную, равную $\varphi(z)$.

Теорема. Пусть f голоморфна в области D, а $U \in D$ — круг радиуса R с центром в z_0. Тогда в U функция f представляется в виде $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$ и γ — окружность с центром в z_0 радиуса $r < R$.

Задача 5. (**доказательство теоремы**). а) Докажите, что $\frac{1}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$.

б) Пусть $\zeta \in \gamma$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ сходится абсолютно и равномерно по ζ на окружности γ.

в) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ сходится равномерно по ζ на γ. Проинтегрировав его почленно, получите утверждение теоремы.

Задача 6. Докажите, что производная голоморфной функции голоморфна.

Задача 7. Докажите, что если функция f в круге $\{|z-z_0| < R\}$ представима как сумма степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, то $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Задача 8. (**неравенства Коши**). Пусть f голоморфна в замкнутом круге $\{|z-z_0| \leqslant r\}$, причем на границе круга $|f(z)| < M$. Докажите, что $|c_n| \leqslant \frac{M}{r^n}$.

Задача 9. (**теорема Лиувилля**). Докажите, что ограниченная функция, голоморфная во всей плоскости $\mathbb{C}$, постоянна.

Задача 10. (**основная теорема алгебры**).

а) Пусть $f(z)$ — многочлен. Докажите, что для любого $M > 0$ существует $R > 0$ такое, что при $|z| > R$ верно $|f(z)| > M$.

б) Пусть f не имеет корней в компактной области D. Докажите, что существует $\alpha > 0$ такое, что $|f(z)| > \alpha$ в области D.

в) Докажите, что поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Задача 11. (**теорема Морера**). Пусть f непрерывна в области D и интеграл от нее по границе $\partial\Delta$ любого треугольника $\Delta \subset D$ равен нулю. Докажите, что f голоморфна в D.
Указание: докажите, что f имеет первообразную в D.

Задача 12. Докажите эквивалентность трех условий:

а) функция f голоморфна в области D;

б) функция f непрерывна в D и интеграл от нее по границе любого треугольника $\Delta \subset D$ равен нулю;

в) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ в D.

Задача 13. Пусть f голоморфна в окрестности точки z_0, $f(z_0) = 0$ и f не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки z_0. Докажите, что существует такое натуральное число n, что $f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z)$, где φ голоморфна и отлична от нуля в окрестности точки z_0.

Задача 14. (**теорема единственности**). Пусть f_1 и f_2 — голоморфные в области D функции, совпадающие на множестве, имеющем хоть одну предельную точку в D. Докажите, что $f_1 = f_2$ всюду в D.

Задача 15. Пусть f голоморфна в области D, причем $D \bigcap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Докажите, что f единственным образом представляется в виде $f = g + ih$, где g и h голоморфны в D и принимают действительные значения на $\mathbb{R}$.

Положим $\quad cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

Задача 16. Найдите разложение в ряд и радиус сходимости функций $sin z$ и $cos z$. Найдите область однолистности этих функций (т.е. максимальную область, на которой отображение взаимно-однозначно). Найдите такие области для функций $tg z$ и $ctg z$.