Ряды Лорана и особые точки

Теорема Вейерштрасса. *Пусть* $\{f_n(z)\}$ *голоморфны в области* D *и ряд* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *равномерно сходится на любом компакте в* D. *Тогда* f *голоморфна в* D *и* $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f'_n(z)$.

Задача 1. (**доказательство теоремы**).

а) Докажите, что f голоморфна в D.

б) Воспользовавшись интегральной формулой для $f'(z)$, получите утверждение теоремы.

Теорема Лорана. Любая функция f, голоморфная в кольце $D = \{r < |z - z_0| < R\}$, представима в D в виде $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$ и γ — окружность с центром в z_0 радиуса ρ $(r < \rho < R)$.

Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называется **рядом Лорана**, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ — его **правильной частью**, а $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n$ — его **главной частью**.

Задача 2. Докажите теорему Лорана. (Указание: для получения главной части воспользуйтесь формулой $-\frac{1}{\zeta - z} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$).

Задача 3. Докажите, что ряд Лорана задает функцию, голоморфную в кольце $D = \{r < |z - z_0| < R\}$, где $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$ и $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Задача 4. Если функция f в кольце $D = \{r < |z - z_0| < R\}$ представима в виде $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, то $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$.

Точка z_0 называется **изолированной особой точкой** функции f, если существует проколотая окрестность точки z_0, в которой f голоморфна.

Изолированная особая точка z_0 называется

· **устранимой точкой**, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$;

· **полюсом** если существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

· **существенно особой точкой**, если предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Задача 5. Докажите, что изолированая особая точка z_0 функции f является устранимой тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух эквивалентных условий:

а) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ в окрестности точки z_0;

б) f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки z_0.

(Указание: обобщите неравенства Коши на случай рядов Лорана и воспользуйтесь ими для доказательства достаточности этого условия).

Задача 6. Докажите, что изолированая особая точка z_0 функции f является полюсом тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух эквивалентных условий:

а) $f(z) = \sum\limits_{n=-N}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad N>0;$

б) функция $\varphi = 1/f$, $\varphi \not\equiv 0$ голоморфна в некоторой окрестности точки z_0 и $\varphi(z_0)=0$.
(Указание: для доказательства необходимости рассмотрите разложение в ряд функции φ).

Задача 7. (**теорема Сохоцкого**). Докажите, что если a — существенно особая точка функции f, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \infty$ существует последовательность $z_n \to a$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Задача 8. Докажите, что f имеет полюс порядка N в точке z_0 тогда и только тогда, когда f^{-1} имеет 0 порядка N в z_0.

Точка ∞ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если f голоморфна в окрестности $\{R<|z|<\infty\}$ точки ∞.

Задача 9. а) Докажите, что ∞ — изолированная особая точка $f(z)$ тогда и только тогда, когда 0 — изолированная особая точка функции $f(z^{-1})$.

б) В каких случаях ∞ является устранимой особой точкой, полюсом, существенно особой точкой? Как в каждом из этих случаев выглядит разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки ∞?

Функция, голоморфная на всем $\mathbb{C}$, называется **целой**. Функция, не имеющая в D особенностей, за исключением устранимых точек и полюсов, называется **мероморфной** в D.

Задача 10. а) Докажите, что функция f, голоморфная на $\overline{\mathbb{C}}$, постоянна.

б) Докажите, что функция f, мероморфная в $\overline{\mathbb{C}}$, рациональна (т.е. $f = \frac{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0}{b_k z^k + \ldots + b_1 z + b_0}$).

Задача 11. Докажите, что если f — целая и $|f(z)| \leqslant const|z|^k$, то f — многочлен.

Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ определена в области D и γ — маленькая окружность с центром в точке z_0. Тогда величина $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ называется **вычетом** функции f в точке z_0. Обозначение: $\operatorname*{res}\limits_{z_0} f$. Если $\infty \in D$, то вычетом в ∞ называется $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f = -c_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz$.

Задача 12. Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ в окрестности точки z_0, где φ и ψ голоморфны в z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ и $\psi'(z_0) \neq 0$. Докажите, что $\operatorname*{res}\limits_{z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Задача 13. Пусть z_0 — полюс порядка n функции f. Докажите, что
$\operatorname*{res}\limits_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}[(z-z_0)^n f(z)]^{(n-1)}$.

Задача 14. а) Пусть f голоморфна в компактной области D всюду, кроме конечного множества точек $z_1, ..., z_k$. Докажите, что $\int\limits_{\partial D} f(z)dz = \sum\limits_{j}^{k} \operatorname*{res}\limits_{z_j} f$.

б) Пусть f голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ всюду, кроме конечного множества точек $z_1, ..., z_k$. Докажите, что $\sum\limits_{j}^{k} \operatorname*{res}\limits_{z_j} f = 0$.

Задача 15. Докажите, что утверждение теоремы Сохоцкого верно и для предельной точки полюсов.

Задача 16. Пусть z_0 — существенно особая точка функции f. Какую особенность имеет в z_0 функция $1/f$?