Разные задачи

Задача 1. Докажите, что для любого многочлена $P(z) = \prod\limits_{k=1}^{n}(z - a_k)$ все корни производной принадлежат выпуклой оболочке корней самого многочлена P.

Задача 2. Приведите пример функции f, всюду в $\mathbb{C}$ имеющей частные производные, удовлетворяющие условию Коши-Римана, но не имеющей комплексной производной в точке $z = 0$.

Задача 3. а) Пусть $f = u(x, y) + iv(x, y)$ голоморфна в D. Докажите, что функции u и v являются гармоническими (т.е. $\triangle u = \triangle v = 0$, где $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа).

б) Докажите, что любая гармоническая в D функция $u(x, y)$ является вещественной частью некоторой голоморфной в D функции $f = u + iv$. Найдите соответствующую функцию v.

Задача 4. Докажите, что целая функция, не принимающая значений из окрестности некоторой точки, постоянна.

Задача 5. Докажите, что функция e^z имеет существенную особенность в точке ∞.

Задача 6. Охарактеризуйте особые точки функций $ctg^2 z$, $\frac{sin^2 z}{sin z^2}$, $z^2 e^{-\frac{1}{z^4}}$.

Задача 7. Найдите $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z^5+1)^2}$.

Задача 8. Классифицируйте изолированные особые точки функции $exp(ctg z)$.

Задача 9. Существует ли функция f, голоморфная в круге $\{|z| < 1|\}$ и при всех $n = 1, 2, 3, ...$ удовлетворяющая условию а) $f(\pm\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$, б) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2^n}$?

Задача 10. Найдите $\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}$, где γ_R — контур, состоящий из отрезка $[-R, R]$ вещественной оси и полуокружности $\omega_R \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Докажите, что $\int_{\omega_R} \frac{dz}{1+z^2} \to 0$ при $R \to +\infty$. Найдите $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Задача 11. Найдите методом, аналогичным методу задачи 10, следующие интегралы:
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^k}$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\pi i t x)\,dx}{1+x^2}$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)\,dx}{1+x^2}$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos(x^3)\,dx}{1-x^3+x^6}$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)\,dx}{x+x^3}$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)\,dx}{x}$.

Задача 12. Пусть целая функция $f(z)$ не принимает значений из отрезка $[0, 1]$. Докажите, что $f(z) \equiv const$.

Задача 13. Пусть f голоморфна и ограничена в правой полуплоскости. Докажите, что если $f(n) = 0$ для всех $n = 1, 2, 3, ...$, то $f \equiv 0$.

Задача 14. Докажите, что функцию, голоморфную во внешности двух непересекающихся компактов, можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых голоморфна во внешности одного компакта, а другая — во внешности другого.