Задачи (смешные и не очень)

Задача 1. **(Среднее значение.)**
Если $f(z)$ голоморфна в открытом диске $\Delta(z_0, R)$ и непрерывна в $\overline{\Delta}(z_0, R)$, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Задача 2. **(Максимум модуля.)**
Модуль голоморфной в области $D \subset \mathbb{C}$ функции $f(z)$, отличной от постоянной, ни в одной точке области не может принимать значения $\sup\limits_{z\in D} |f(z)|$.

Задача 3. Если $f(z)$ — целая функция и

а) $f(z) = o(|z|)$ при $z \to \infty$, то $f(z) \equiv const$;

б) $f(z) = o(|z|^\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$, то $f(z)$ есть многочлен степени $\leqslant [\alpha]$.

Задача 4. Пусть $f(z)$ голоморфна в диске $\Delta(0, R)$ и непрерывна в замкнутом диске $\overline{\Delta}(0, R)$. Доказать, что

$$\iint\limits_{r<|z|<R} f(z)\, dxdy = \pi(R^2 - r^2) f(0).$$

Задача 5. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < R$. Доказать, что для $0 < r < R$

$$\sum |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2\, d\varphi \leqslant \max_{|z|=r} |f(z)|^2.$$

Задача 6. Пусть $f(z)$ голоморфна в диске $\Delta(0, 1)$ и $|f(z)| \leqslant M$ в этом диске. Доказать, что если $z_1, \ldots, z_n$ — нули функции $f(z)$ в диске $\Delta(0, 1)$, то

$$|f(z)| \leqslant M \left| \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \cdot \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z} \cdots \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z} \right|,$$

причем равенство может выполняться либо для всех точек диска, либо ни для одной.

Задача 7. Пусть $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. Доказать, что хотя бы в одной точке окружности $|z| = 1$ имеет место неравенство $|f(z)| > 1$ или $f(z) = z^n$.

Задача 8. Пусть $P_n(z)$ — многочлен степени n и $M_r = \max\limits_{|z|=r} |P_n(z)|$. Доказать, что $\frac{M_r}{r^n}$ — невозрастающая функция на $(0, +\infty)$.

Задача 9. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$, составленный из модулей голоморфных в области D функций, сходится равномерно внутри D, то этим же свойством обладает и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n'(z)|$.

Задача 10. Исследовать на аналитичность тэта-функцию

$$\Theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 z}.$$

Задача 11. Пусть $w = f(z)$ — голоморфная функция. Тогда:

а) дуга L в плоскости z отображается на некоторую дугу в плоскости w, длина которой равна

$$\int_L |f'(z)|\,|dz|.$$

б) области F плоскости $z = x + iy$ соответствует некоторая область в плоскости w, площадь которой равна

$$\iint_F |f'(z)|^2\,dxdy.$$

.

Задача 12. Функция $w = cos(z)$ взаимно-однозначно преобразует прямоугольник $0 < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < \frac{\pi}{2}, 0 < y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ в некоторую область, которую предлагается нарисовать и площадь которой следует вычислить.

Задача 13. Пусть точка z движется с постоянной угловой скоростью 1 по окружности $|z| = r$. Вычислить величину и направление вектора скорости её движущегося в плоскости w образа $w = f(z)$.