Аналитическое продолжение

Каноническим элементом называется пара (U_a, f_a), где $f_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ и U_a – круг с центром в a, в котором ряд сходится. Канонические элементы (U_a, f_a) и $(\tilde{U}_a, \tilde{f}_a)$ считаются эквивалентными, если $f_a \Big|_{U_a \cap \tilde{U}_a} = \tilde{f}_a \Big|_{U_a \cap \tilde{U}_a}$.

Пусть (U_a, f_a) и (U_b, f_b) – канонические элементы и $\gamma \subset \mathbb{C}$ – путь, соединяющий a и b. Говорят, что (U_b, f_b) является аналитическим продолжением (U_a, f_a) вдоль пути γ, если существуют точки $a = a_1, a_2, \ldots, a_k = b \in \gamma$ и канонические элементы (U_{a_m}, f_{a_m}), где $(U_{a_1}, f_{a_1}) = (U_a, f_a)$ и $(U_{a_k}, f_{a_k}) = (U_b, f_b)$, такие что $\gamma \subset \bigcup\limits_{m=1}^{k} U_{a_m}$, $U_{a_m} \cap U_{a_{m+1}} \neq \emptyset$ и $f_{a_m} \Big|_{U_{a_m} \cap U_{a_l}} = f_{a_l} \Big|_{U_{a_m} \cap U_{a_l}}$.

Задача 1. Доказать, что все аналитические продолжения (U_a, f_a) вдоль γ эквивалентны.

Задача 2. (**теорема о монодромии**)
Пусть γ_0 и γ_1 – гомотопные пути с одинаковыми концами a и b, и γ_t $(t \in [0,1])$ – гомотопия между ними. Пусть (U_a, f_a) – канонический элемент, имеющий аналитическое продолжение вдоль каждого γ_t. Тогда аналитические продолжения (U_a, f_a) вдоль γ_0 и γ_1 эквивалентны.
Указание. Пусть T – множество таких $t \in [0,1]$, что аналитические продолжения вдоль γ_0 и γ_t эквивалентны. Докажите, что T открыто и замкнуто.

Задача 3. Докажите, что условие существования аналитического продолжения вдоль каждого γ_t в теореме существенно.

Римановы поверхности

Возьмем два экземпляра $\overline{\mathbb{C}}$, разрезанных вдоль отрицательной полуоси. Склеим их "крест-накрест": правый край одного разреза приклеим к левому краю другого, и наоборот. Полученную поверхность обозначим за S.
Вопрос. Что представляет собой поверхность S?

Задача 4. Докажите, что $w : z \to \sqrt{z}$ задает однолистное отображение из $\overline{\mathbb{C}}$ в S.
Такая поверхность называется **римановой поверхностью** функции w.

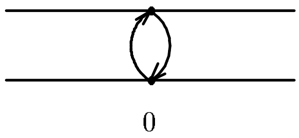
Вопрос. Насколько принципиально, что мы разрезали сферу именно по отрицательной полуоси?

Задача 5. Нарисуйте римановы поверхности функций $\sqrt[3]{x}$, $\quad Ln\ x$, $\quad \sqrt{z^2}$, $\quad \sqrt{z(z-1)}$.

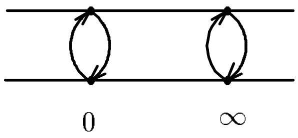
Несложно заметить, что при отображении w все точки $\overline{\mathbb{C}}$, кроме конечного числа, имеют одинаковое количество образов. Такие точки называются **регулярными**. Исключение составляют **точки ветвления**. (В случае $w = \sqrt{z}$ точками ветвления являются 0 и ∞.)

Задача 6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n. Какие точки будут точками ветвления римановой поверхности функции $\sqrt{P(x)}$?

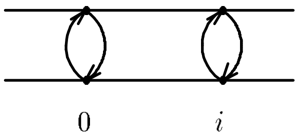
Ниже приведены **схемы римановых поверхностей**. На них показано, как меняются листы при обходе особой точки.



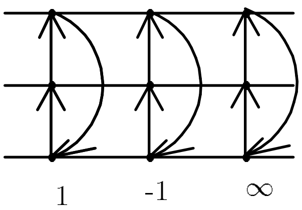
а)



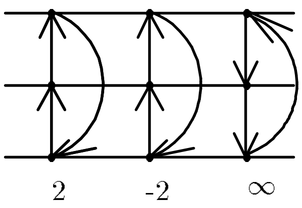
)



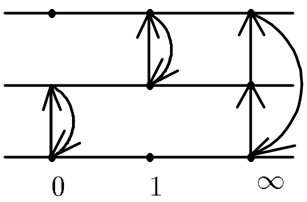
)



ё)



)



)

Задача 7. Какие из этих схем действительно соответствуют римановым поверхностям многозначных функций? Каким функциям соответствуют эти схемы?

Задача 8. Нарисуйте схемы римановых поверхностей следующих функций:
$\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[4]{z^2+1}$, $\sqrt{\sqrt[3]{z}+1}$, $\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}$.

Задача 9. Пусть $f(z) = g(z) + h(z)$. Предположим, что мы уже умеем рисовать схемы римановых поверхностей функций g и h.

а) В каких точках ветвится поверхность функции f?

б) Сколько листов у этой поверхности?

в) Как устроен обход вокруг точки ветвления?

г) Как изменится процедура построения римановой поверхности, если $f(z) = g(z) - h(z)$, $f(z) = g(z) \cdot h(z)$, $f(z) = g(z)/h(z)$?

д) Как построить поверхность функции $\sqrt[k]{f(z)}$? А $g(f(z))$?

Задача 10. Нарисуйте схемы римановых поверхностей следующих многозначных функций:
а) $\sqrt{\frac{1}{z}}$, б) $\sqrt[3]{(z-1)^2 z}$, в) $\sqrt[3]{(z^2+1)^2}$, г) $\sqrt[4]{z^2}$, д) $\sqrt[4]{z(z^3-1)}$, е) $\sqrt{\sqrt[3]{z}-1}$,
ж) $\sqrt{z}+\sqrt{z-1}$, з) $\sqrt{z^2-1}+\sqrt[4]{z-1}$, и) $\sqrt[3]{z}+\sqrt[4]{z}$, к) $\sqrt[4]{(z-1)^2(z+1)^3}$, л) $\sqrt[3]{\frac{z-1}{z+1}}$,
м) $\sqrt{z}\sqrt[3]{z}$, н) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{z^2-1}+\sqrt{z+1}}$, о) $\sqrt[6]{\sqrt{z-1}+\sqrt[3]{\frac{z+1}{z}}}$.

Непрерывное отображение $p : X \to Y$ называется **разветвленным накрытием**, если а) множество $Y \setminus p(X)$ дискретно;

б) каждая точка $y \in Y$ имеет такую окрестность O, что ее полный прообраз $p^{-1}(O)$ есть объединение попарно не пересекающихся открытых множеств U_i, на каждом из которых отображение $p : U_i \to O$ устроено, как x^{k_i}. Числа k_i называются **индексами ветвления**.

Задача 11. (**формула Римана-Гурвица**).
Пусть $p : X \to Y$ — разветвленное накрытие. Докажите, что

$$\chi(X) = deg(p)\chi(Y) - \sum_{x \in X} (k_x - 1).$$

Задача 12. Найдите род римановых поверхностей, построенных в задачах этого листка.