Теорема Римана в задачах

Обозначения и соглашения:

· Δ-единичный диск с центром в нуле;

· Все области ограничены (для простоты);

· Все функции голоморфны;

· Унивалентность = инъективность;

· $(f_j) \Longrightarrow g$ — равномерная сходимость на компактах.

Теорема (Риман). Пусть область $U \subset \mathbb{C}$ гомеоморфна Δ. Тогда U биголоморфно эквивалентна Δ.

Задача 1. (Шаг 1). Пусть $p \in U$ и $F = \{\delta : U \to \Delta \ \mid \ \delta$ унивалентна, $\delta(p) = 0\}$. Докажите, что F непусто.

Задача 2. (Шаг 2). Докажите, что F — нормальное семейство.

Задача 3. (Шаг 3). Пусть $M = \sup\{|\delta'(p)|,\ \delta \in F\}$. Докажите, что M конечно.

Задача 4. (Шаг 4). Существует такая функция $\delta_0 \in F$, что $|\delta'(p)| = M$.

Задача 5. (помощь). Пусть $f_j \Longrightarrow f$ в области U, причем f_j не равны нулю. Тогда, либо $f_j \Longrightarrow 0$, либо f не равна нулю в U.

Задача 6. (Шаг 5) δ_0 унивалентна в U.

Задача 7. (Шаг 6) δ_0 — искомая функция.

Указание: если δ_0 выпускает $\beta \in \Delta$, то, подправив с помощью $t_\beta = \frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z}$, можно считать, что δ_0 отлична от нуля в U. Тогда рассмотрим корректно определенную в U функцию $\mu = \sqrt{\delta_0}$. Функция $t_{\mu(p)} \circ \mu \in F$. С другой стороны, модуль ее производной в точке p больше,чем M. Противоречие.