Геометрические принципы

Принцип аргумента. Пусть f мероморфна в области D, ∂D не содержит ни нулей, ни полюсов f, а N и P — числа нулей и полюсов функции f в D. Тогда

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} arg f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f'}{f}\,dz.$$

Теорема Руше. Пусть f и g голоморфны в замкнутой области $\overline{G}$, и $|f(z)| > |g(z)|$ для всех $z \in \partial G$. Тогда функции f и $f+g$ имеют в G одинаковое число нулей.

Задача 1. Докажите теорему Руше.

Задача 2. Сколько решений в круге $|z| < 1$ имеет уравнение $z^5 - 2z^3 + 5z - 1 = 0$?

Задача 3. Пусть $P(z)$ — многочлен со старшим коэффициентом 1.
Докажите, что $\max\limits_{|z|\leqslant 1}|P(z)| \geqslant 1$.

Задача 4. Пусть f однозначна и аналитична в D, непрерывна на $\overline{D}$ и $|f(z)| = const$ на ∂D. Докажите, что либо $f(z) \equiv const$, либо f имеет хотя бы один нуль в D.

Задача 5. Докажите, что при любом $a \in \mathbb{C}$ и целом $n \geqslant 2$ уравнение $az^n + z + 1 = 0$ имеет корень в круге $|z| \leqslant 2$.

Задача 6. Докажите, что при $t > 1$ уравнение $ze^{t-z} = 1$ имеет в круге $|z| \leqslant 1$ ровно один корень, причем действительный.

Задача 7. Решите в целых функциях уравнение $f(z) = sin f(z)$.

Задача 8. Пусть f_1,...,f_n голоморфны в замыкании $\overline{D}$ ограниченной области D. Докажите, что $\varphi(z) = |f_1| + ... + |f_n|$ достигает максимума на ∂D.

Задача 9. Докажите, что уравнение $sin z = z$ имеет в $\mathbb{C}$ бесконечно много решений.

Задача 10. Докажите, что уравнение $tg z = z$ имеет только действительные корни.

Задача 11. Пусть все нули многочлена $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ лежат в круге $|z| < 1$, и пусть $Q(z) = \Re e\ P(e^{i\varphi})$, $\quad S(z) = \Im m\ P(e^{i\varphi})$, $\quad (\varphi \in \mathbb{R})$.

а) Докажите, что все нули тригонометрических многочленов Q и S действительны (на промежутке $[0, 2\pi]$ каждый из этих многочленов имеет $2n$ нулей).

б) Докажите, что между каждыми двумя нулями многочлена Q лежит ровно один нуль многочлена S.

Задача 12. Пусть $0 \leqslant a_0 < a_1 < ... < a_n$. Докажите, что $F(z) = a_0 + a_1 cos z + ... + a_n cos nz$ имеет только действительные нули.