ЛЕКЦИЯ 1

Пусть $V = \mathbb{R}^n$ — линейное пространство размерности n, состоящее из всех наборов $(x_1, \dots, x_n)$ вещественных чисел. *Отрезком* $[a, b]$ с концами $a, b \in V$ называется подмножество V, состоящее из всех векторов вида $ta + (1-t)b$, где $0 \le t \le 1$. Подмножество $X \subset V$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками $a, b \in X$ оно содержит весь отрезок с концами в этих точках: $[a, b] \subset X$. Примеры выпуклых множеств:

Пример 1. точка

Пример 2. отрезок

Пример 3. линейное подпространство $W \subset V$.

Пример 4. аффинное подпространство $L \subset V$. Аффинным подпространством называется множество векторов вида $u + w$, где вектор u фиксирован, а w пробегает некоторое линейное подпространство $W \subset V$. По определению считают $\dim L = \dim W$.

Нормой вектора $a = (a_1, \dots, a_n)$ назовем число $|a| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$. *Шаром* с центром $u \in V$ и радиусом $R \ge 0$ называется множество $\Omega(u; R) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in V \mid |x - u| \le R\}$.

Пример 5. Шар Ω — выпуклое множество.

Для доказательства нам потребуется ввести одно понятие, которым мы будем неоднократно пользоваться и в дальнейшем: *скалярным произведением* векторов a и b называется число $(a, b) \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_1b_1 + \dots + a_nb_n$.

Лемма 1.
1. *Скалярное произведение линейно по каждому аргументу (билинейно):* $(\lambda a + \mu b, c) = \lambda(a, c) + \mu(b, c) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, a, b, c \in V$, *и аналогично для второго аргумента.*
2. *Скалярное произведение симметрично:* $(a, b) = (b, a)$.
3. *Скалярное произведение положительно определено:* $(a, a) \ge 0 \quad \forall a \in V$, *и* $(a, a) = 0$ *только при* $a = 0$.
4. $|a| = \sqrt{(a, a)}$.

Доказательство очевидно.

Лемма 2 (Неравенство Коши–Буняковского–Шварца). $(a, b)^2 \le (a, a)(b, b) = |a|^2\, |b|^2$.

Proof. Рассмотрим функцию $f(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (a - tb, a - tb) = (a, a) - 2t(a, b) + t^2(b, b)$. Этот квадратный трехчлен всюду неотрицателен, поэтому его дискриминант $D = (a, b)^2 - (a, a)(b, b) \le 0$. □

Proof. Без ограничения общности можно считать, что центром шара u является начало координат. Пусть $a, b \in \Omega \Leftrightarrow |a| \le R$, и пусть $c \in [a, b] \Leftrightarrow c = ta + (1-t)b$ для некоторого $t \in [0, 1]$. Имеем в силу леммы 1: $|c|^2 = (c, c) = t^2(a, a) + 2t(1-t)(a, b) + (1-t)^2(b, b)$. Отсюда по лемме 2 $|c|^2 \le t^2\,|a|^2 + 2t(1-t)\,|a|\,|b| + (1-t)^2\,|b|^2 \le R^2(t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2) = R^2$, т.е. $c \in \Omega$. □

Предложение 1. *Пересечение выпуклых множеств (в любом количестве, в т.ч. бесконечном) выпукло.*

Proof. Пусть все множества X_α выпуклы, и $a, b \in \bigcap_\alpha X_\alpha$. Для всякой точки $x \in [a, b]$ и каждого индекса α верно, что $x \in X_\alpha$ — в силу выпуклости множества X_α. Поэтому $x \in \bigcap_\alpha X_\alpha$, т.е. пересечение выпукло. □

Выпуклой комбинацией векторов $y_1, \dots, y_s \in V$ называют любой вектор вида $y = \sum_{k=1}^s \lambda_k y_k$, где все $\lambda_k \ge 0$, и $\sum_{k=1}^s \lambda_k = 1$.

Лемма 3. *Пусть X — выпуклое множество, и $y_1, \dots, y_s \in X$. Тогда любая выпуклая комбинация векторов $y_1, \dots, y_s$ также лежит в X.*

Proof. Индукция по числу s. База индукции $s = 1$ тривиальна. Пусть для сумм, содержащих не более s слагаемых, утверждение доказано, и пусть $y = \sum_{k=1}^{s+1} \lambda_k y_k$. При этом, конечно, предполагается, что все $\lambda_k \ne 0$, иначе реально сумма содержит не более s слагаемых. Точка $z = \frac{\sum_{k=1}^s \lambda_k y_k}{\sum_{k=1}^s \lambda_k} = \frac{\sum_{k=1}^s \lambda_k y_k}{1 - \lambda_{s+1}} \in X$ по предположению индукции. Поскольку X — выпуклое множество, точка $y = (1 - \lambda_{s+1})z + \lambda_{s+1}y_{s+1}$ также принадлежит X. □

Пересечение *всех* выпуклых множеств, содержащих данное множество $Y \subset V$, называется *выпуклой оболочкой* Y и обозначается $\operatorname{co} Y$. В силу Предложения 1 $\operatorname{co} Y$ — выпуклое множество. Очевидно, $Y \subset \operatorname{co} Y$; если само Y выпукло, то $\operatorname{co} Y = Y$.

Теорема 1. *$\operatorname{co} Y$ состоит из всевозможных линейных комбинаций произвольных конечных наборов векторов из Y.*

Proof. Обозначим Λ множество всех линейных комбинаций. Очевидно, $\Lambda \subset \operatorname{co} Y$ — это следует из леммы 3. Остается доказать, что $\operatorname{co} Y \subset \Lambda$.

Множество Λ выпукло. Действительно, пусть $a = \sum_k \lambda_k y_k$, $b = \sum_l \mu_l z_l$, где $y_k, z_l \in Y$. Пусть $x \in [a, b]$, т.е. $x = ta + (1-t)b$, где $0 \le t \le 1$. Тогда $x = \sum_k t\lambda_k y_k + \sum_l (1-t)\mu_l z_l$. Поскольку $t\lambda_k \ge 0$, $(1-t)\mu_l \ge 0$ и $\sum_k t\lambda_k + \sum_l (1-t)\mu_l = t + (1-t) = 1$, точка $x \in \Lambda$. Выпуклость доказана.

Очевидно, $Y \subset \Lambda$ — для произвольной точки $y \in Y$ можно взять сумму, содержащую единственное слагаемое $1 \cdot y$. Значит, Λ является выпуклым множеством, содержащим Y — следовательно, $\operatorname{co} Y \subset \Lambda$, и теорема доказана. □

Подмножество $F \subset X$ выпуклого множества X называется его гранью, если множество $X \setminus F$ выпукло и $F = X \cap L$ для некоторго аффинного подпространства $L \subset V$. Размерностью грани называется наименьшая возможная размерность аффинного подпространства L. Нульмерные грани это точки (называемые *вершинами*). Одномерные грани это отрезки, интервалы, полуинтервалы, лучи или прямые (проверьте !), называемые *ребрами*. Нетрудно видеть, что конец ребра является вершиной.

Пример 6. У шара Ω вершиной является любая точка граничной сферы. Сам шар является своей n-мерной гранью, и больше граней у шара нет. Кстати, отсюда видно, что вершина не обязательно является концом ребра. У открытого шара $\{x \in V \mid |x - u| < R\}$ граней нет вовсе, за исключением тривиальной n-мерной.

Пример 7. У выпуклого многоугольника на плоскости и выпуклого многогранника в трехмерном пространстве понятия вершины, ребра и двумерной грани совпадают с общепринятыми — отсюда и название.

Докажем признак, по которому можно находить вершины и ребра выпуклого множества. Функцию вида $f(x) = c + p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$ назовем *линейной неоднородной.*

Лемма 4. *Пусть f — линейная неоднородная функция. Тогда множества $\{x \in V \mid f(x) \ge 0\}$, $\{x \in V \mid f(x) > 0\}$ и $\{x \in V \mid f(x) = 0\}$ выпуклы.*

Доказательство — непосредственная проверка.

Следствие . *Пусть $Y = \operatorname{co}\{a_1, \dots, a_N\}$, f — линейная неоднородная функция. Тогда если $f(a_i) > 0$ ($= 0$, ≥ 0) для всех $i = 1, \dots, N$, то $f(a) > 0$ (соответственно, $= 0$, ≥ 0) для всякого $a \in Y$.*

Предложение 2. *Пусть $X \subset V$ — выпуклое множество, $a \in X$, а f — линейная неоднородная функция, такая что $f(a) = 0$ и $f(x) > 0$ для всех остальных точек $x \in X$. Тогда точка a — вершина множества X. Пусть $a, b \in X$, а g — линейная неоднородная функция, такая что $f(a) = f(b) = 0$, и $f(x) > 0$ для всех точек $x \in X \setminus [a, b]$. Тогда $[a, b]$ — ребро множества X.*

Proof. вытекает непосредственно из леммы 4 и предложения 1: множества $X \setminus \{a\} = X \cap \{x \in V \mid f(x) > 0\}$ и $X \setminus [a, b] = X \cap \{x \in V \mid g(x) > 0\}$ выпуклы. □

Выпуклая оболочка конечного множества точек называется *выпуклым многогранником.* Нетрудно видеть, что выпуклый многогранник на плоскости (т.е., выпуклый многоугольник), любые две вершины которого соединены ребром, обязательно является треугольником. В трехмерном пространстве такой многогранник обязательно является тетраэдром. В пространствах большего числа измерений аналогичный факт неверен:

Пример 8. Рассмотрим в четырехмерном пространстве выпуклую оболочку точек $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 4, 8, 16)$, $\dots$, $a_N = (N, N^2, N^3, N^4)$. Покажем, что у этого многогранника все точки a_k являются вершинами. Для доказательства того, что a_k — вершина, рассмотрим многочлен $P_k(t) = (t-k)^4 \stackrel{\text{def}}{=} p_4 t^4 + p_3 t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0$. Сопоставим этому многочлену линейную неоднородную функцию на $\mathbb{R}^4$: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = p_4 x_4 + p_3 x_3 + p_2 x_2 + p_1 x_1 + p_0$. Тогда, как нетрудно видеть, $f(a_s) = (s-k)^4$, т.е. $f(a_k) = 0$ и $f(a_s) > 0$ при $s \ne k$. Из предложения 2 вытекает, что a_k — вершина.

Докажем теперь, что вершины a_k и a_l соединены ребром. Для этого рассмотрим многочлен $P_{kl}(t) = (t-k)^2(t-l)^2 \stackrel{\text{def}}{=} q_4 t^4 + q_3 t^3 + q_2 t^2 + q_1 t + q_0$ и сопоставим ему линейную неоднородную функцию на $\mathbb{R}^4$: $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = q_4 x_4 + q_3 x_3 + q_2 x_2 + q_1 x_1 + q_0$. Нетрудно видеть, что $g(a_s) = (s-k)^2(s-l)^2$, откуда следует, что g зануляется в точках a_k и a_l и положительна в остальных точках a_i. Из предложения 2 вытекает, что a_k и a_l соединены ребром.