ЛЕКЦИЯ 10

Пусть M — открытое линейно связное подмножество $\mathbb{R}^n$. Функцию $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ называют *полной римановой метрикой*, если

1. Для всякого $a \in M$ существует положительно определенная квадратичная форма g_a, гладко зависящая от a и такая, что $\varrho^2(a, a+\delta) = g_a(\delta) + o(|\delta|^2)$ при $\delta \to 0$.
2. $\varrho(a, b)$ равно наименьшей длине кривой, соединяющей точки a и b.

Поясним второе требование. Семейство форм g_a позволяет, неформально говоря, вычислять значение $\varrho(a, b)$, когда a и b бесконечно близки. Но кривая это ломаная с бесконечно малыми звеньями, поэтому ее длину можно вычислить как сумму (бесконечную) выражений $\varrho(a_i, a_{i+1})$, где a_i, a_{i+1} — концы (бесконечно близкие) i-го звена. Формально длина кривой $\gamma(t)$ определяется как $\int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))}\, dt$.

Более "инвариантный" взгляд на набор форм g_a таков. Рассмотрим пространство гладких кривых на плоскости Лобачевского Π. Две кривых γ_1 и γ_2 назовем эквивалентными, если $\gamma_1(t) - \gamma_2(t) = o(t)$ при $t \to 0$. Пространство классов эквивалентности кривых называется *касательным расслоением* к плоскости Лобачевского и обозначается $T\Pi$. Класс эквивалентности кривой γ однозначно определяется точкой $\gamma(0)$ и вектором $\gamma'(0)$. Множество классов эквивалентности кривых, проходящих через точку a (т.е. таких, что $\gamma(0) = a$), соответствует множеству векторов $\gamma'(0)$, т.е. является линейным пространством $T_a\Pi \cong \mathbb{R}^2$ (оно называется касательным пространством к Π в точке a; его элементы можно мыслить себе как векторы, приложенные в точке a). Функция g_a задает скалярное произведение (а, следовательно, норму и метрику) на этом пространстве $T_a\Pi$.

Теорема 1. *Функция ϱ является метрикой на множестве M.*

Доказательство. Из положительной определенности форм g_a следует, что длина всякой кривой, в том числе и кратчайшей, положительна — значит, $\varrho(a, b) \geq 0$ и $\varrho(a, b) = 0$ только при $a = b$.

Квадратичная форма g_a, как и всякая квадратичная форма — четная функция: $g_a(-\delta) = g_a(\delta)$. Отсюда следует, что длина кривой не изменится, если ее пройти в обратном порядке: $\gamma(t) \mapsto \gamma(1-t)$. Поэтому $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. Кратчайшая кривая, соединяющая точки a и c, не может иметь длину, большую $\varrho(a, b) + \varrho(b, c)$, поскольку такую длину имеет объединение кратчайших кривых, проходящих через a, b и b, c — получаем неравенство треугольника. $\square$

Часто римановой метрикой называют не функцию ϱ, а семейство положительно определенных форм g_a. Если задано такое семейство, то метрика ϱ определяется им однозначно, если существует. Действительно, длина кривой в этом случае определяется вышеприведенным интегральным выражением; проблема состоит в том, существует ли кратчайшая кривая, соединяющая две данные точки.

Теорема 2. *На плоскости Лобачевского существует единственная, с точностью до умножения на константу, риманова метрика, сохраняемая каждым аффинным преобразованием.*

Доказательство. Мы построим семейство квадратичных форм g_z, а потом проверим, что они порождаются некоторой римановой метрикой ϱ. Зафиксируем некоторую точку a и приложенный в ней вектор $v \in T_a\Pi$. Нам нужно вычислить $g_z(\delta)$, где $\delta = dx + idy \in T_z\Pi$ — вектор, приложенный к точке $z = x + iy$ плоскости Лобачевского.

Положим по определению $g_a(v) = 1$. Проведем через a луч p в направлении вектора v, а через z — луч q в направлении δ. Существует единственное аффинное преобразование I рода, переводящее z в a, а q в p. Тем самым образ вектора δ есть λv, где λ — некоторое положительное число. Тогда положим $g_z(\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda^2$.

Нам нужно проверить, что g_z — действительно квадратичная форма, затем доказать, что семейство форм g_z порождается некоторой римановой метрикой ϱ. Инвариантность этой метрики относительно аффинных преобразований I рода имеет место по построению, но инвариантность относительно преобразований II рода потребуется проверить дополнительно. Мы решим эти задачи, описав g_z и ϱ явно. Для этого нам понадобится

Лемма. *Пусть z_* является неподвижной точкой аффинного преобразования I рода $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Тогда $\left.\frac{d}{dz}\frac{az+b}{cz+d}\right|_{z_*}$ по модулю равен 1.*

Доказательство. $\frac{d}{dz}\frac{az+b}{cz+d}\Big|_{z_*} = \frac{ad-bc}{(cz_*+d)^2}$. У равенства $z_* = \frac{az_*+b}{cz_*+d}$ рассмотрим мнимую часть:

$$\operatorname{Im} z_* = \operatorname{Im}\frac{az_*+b}{cz_*+d} = \operatorname{Im}\frac{(az_*+b)(c\overline{z_*}+d)}{|cz_*+d|^2} = \operatorname{Im}\frac{bc\overline{z_*}+adz_*}{|cz_*+d|^2} = \frac{ad-bc}{|cz_*+d|^2}\operatorname{Im} z_*,$$

откуда следует требуемое. □

Под действием преобразования f, оставляющего на месте точку $z = x+iy$, всякий вектор $\delta = dx + idy \in T_z\Pi$, приложенный в этой точке, умножается на $f'(z)$. Поэтому в силу леммы его евклидова длина $\sqrt{dx^2+dy^2}$ не изменяется; то же самое верно и для аффинно инвариантной метрики. Поэтому эти две метрики пропорциональны. Коэффициент пропорциональности может, разумеется, зависеть от x и y, но инвариантность метрики относительно параллельных переносов $z \mapsto z+a$ ($a \in \mathbb{R}$) показывает, что от x этот коэффициент на самом деле не зависит.

Для определения зависимости от y выберем в качестве "стандартного вектора" v некоторый вектор idy, приложенный в точке $a = i$. Пусть теперь точно такой же (в стандартных координатах) вектор $w = idy$ приложен в точке $z = ki$, где $k \in \mathbb{R}$. Преобразование $z \mapsto z/k$ переводит ki в i, а w в idy/k. Поэтому длина вектора w равна $1/k$, и для аффинно инвариантной римановой метрики форма g_{x+iy} (квадрат длины) имеет вид $g_{x+iy}(dx+idy) = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Перед этим выражением можно поставить произвольную константу. Построенное семейство квадратичных форм, очевидно, инвариантно относительно преобразования $z \mapsto -\overline{z}$, а, следовательно, и относительно всех аффинных преобразований II рода.

Для доказательства того, что семейство форм g порождает риманову метрику, покажем, что кратчайшая кривая существует. Точнее, кратчайшей кривой, соединяющей точки $z_1, z_2 \in \Pi$, является отрезок прямой, соединяющей эти точки. Аффинным преобразованием можно добиться того, чтобы точки z_1 и z_2 лежали на одном вертикальном луче. Поскольку метрика аффинно инвариантна (и понятие прямой — тоже, по определению), то достаточно доказать утверждение для таких точек. Соединим z_1 и z_2 произвольной кривой γ. Разобьем плоскость Лобачевского на бесконечно узкие горизонтальные полоски. Нетрудно заметить, что из формулы $g_{x+iy}(dx+idy) = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ следует, что пересечение кривой γ с каждой такой полоской не короче, чем пересечение с той же полоской вертикального луча. Поэтому вертикальный луч — кратчайшая линия, соединяющая z_1 и z_2. □

Вычислим теперь расстояние ϱ между точками явно. Пусть сначала $z_1 = iy_1, z_2 = iy_2$ и, для определенности, $y_2 > y_1$. Тогда $\varrho(z_1, z_2) = \int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{y} = \ln y_2/y_1$. Заметим теперь, что прямая (z_1z_2) пересекает абсолют в точках 0 и ∞, и отношение y_1/y_2 равно двойному отношению $[z_2, z_1, 0, \infty]$. Поскольку двойное отношение сохраняется при аффинных преобразованиях, получается такая формула: $\varrho(z_1, z_2) = |\ln|[z_2, z_1, a, b]||$, где a, b — точки пересечения прямой (z_1z_2) с абсолютом. Явное вычисление точек a и b дает окончательно $\varrho(z_1, z_2) = \operatorname{Arch}(1 + \frac{|z_1-z_2|^2}{2\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2})$, где $\operatorname{Arch}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ln(t+\sqrt{t^2-1})$ — функция, обратная гиперболическому косинусу.

Метрика позволяет измерять площади фигур на плоскости Лобачевского. Площадь бесконечно малого прямоугольника со сторонами dx и dy, угол которого расположен в точке $z = x+iy$, равна $dxdy/y^2$. Для того, чтобы подсчитать площадь фигуры Φ, нужно разбить ее на такие прямоугольники и сложить их площади, т.е., найти $\int_\Phi \frac{1}{y^2}\,dxdy$. Площадь, как и длина, аффинно инвариантна — площадь фигуры равна площади ее образа при аффинном преобразовании. Более того, аналогично теореме 2 можно доказать, что существует ровно один, с точностью до константы, способ определить площади фигур так, чтобы аффинная инвариантность имела место.