ЛЕКЦИЯ 2

Напомним, что множество V называется *метрическим пространством*, если на парах его точек задана функция ϱ (называемая *метрикой* или *расстоянием*), обладающая следующими свойствами:

1. (неотрицательность) $\forall x, y\ \varrho(x, y) \geq 0$, и $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. (симметрия) $\forall x, y\ \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$.
3. (неравенство треугольника) $\forall x, y, z\ \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

В качестве множества V возьмем n-мерное линейное пространство; будем рассматривать только метрики, инвариантные при параллельных переносах, т.е. такие, что $\varrho(x + a, y + a) = \varrho(x, y)$ для всех $x, y, a \in V$. В этом случае $\varrho(x, y) = \varrho(x - y, 0)$, и поэтому метрика полностью определяется функцией $||a|| \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(a, 0)$.

Определение. Функция $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ называется *нормой*, если формула $\varrho(x, y) = ||x - y||$ определяет метрику, и функция является положительно однородной: $||\lambda x|| = \lambda\, ||x||$ при $\lambda \geq 0$.

Нетрудно видеть, что первое требование (чтобы $||x - y||$ определяло метрику) эквивалентно таким трем свойствам функции $||\cdot||$:

1'. (неотрицательность) $\forall x\ \ ||x|| \geq 0$, и $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2'. (симметрия) $\forall x\ \ ||-x|| = ||x||$.
3'. (сублинейность) $\forall x, y\ \ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Свойство 2' в сочетании с требованием положительной однородности нормы эквивалентно равенству $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x|| \quad \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $B = \{x \in V \mid ||x|| \leq 1\}$ — шар единичного радиуса с центром в начале координат в метрике, порожденной нормой $||\cdot||$.

Теорема 1. *Множество B 1) выпукло, 2) центрально симметрично относительно начала координат 3) пересекается с любой прямой в V, проходящей через начало координат, по отрезку, отличному от точки. Норма $||\cdot||$ удовлетворяет равенству $||x|| = \inf\{\lambda > 0 \mid x/\lambda \in B\}$. Функция, определенная этим равенством по произвольному множеству B, является нормой тогда и только тогда, когда множество B обладает свойствами 1–3.*

Доказательство. Имеем: $x/\lambda \in B \Leftrightarrow ||x/\lambda|| \leq 1 \Leftrightarrow ||x|| \leq \lambda$, откуда следует равенство, выражающее норму через свойства множества B.

Свойство 1 следует из свойств положительной однородности и сублинейности нормы. Действительно, пусть $a, b \in B$, $c = ta + (1 - t)b$. Тогда $||c|| \leq t\, ||a|| + (1 - t)\, ||b|| \leq t + 1 - t = 1$, т.е. $c \in B$. Свойство 2 следует из симметричности нормы. Пересечение B с прямой $\ell \subset V$ это отрезок $[-x/\, ||x||\, , x/\, ||x||]$, где x — произвольный ненулевой вектор, принадлежащий прямой ℓ.

Обратно, пусть множество B обладает свойствами 1–3. *Определим* функцию $||\cdot||$ равенством из формулировки теоремы. Пусть $x \neq 0$. Прямая $\ell_x =$

$\{\mu x, \mu \in \mathbb{R}\}$, натянутая на вектор x, пересекает B по отрезку. Поэтому множество, минимум которого равен по определению $\|x\|$, непусто и отделено от нуля — следовательно, $\|x\|$ определена и строго положительна. Если $y = \mu x$, $\mu > 0$, то множества, используемые при определении $\|x\|$ и $\|y\|$, отличаются умножением на μ — отсюда следует положительная однородность нормы. Равенство $\|-x\| = \|x\|$ следует из симметричности множества B. Сублинейность следует из выпуклости: действительно, $\|x+y\| = (\|x\| + \|y\|) \left\| \frac{x}{\|x\|+\|y\|} + \frac{y}{\|x\|+\|y\|} \right\| = (\|x\| + \|y\|) \left\| \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|} \frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|} \frac{y}{\|y\|} \right\|$. Вектор, стоящий под знаком нормы, принадлежит отрезку, соединяющему $x/\|x\|$ и $y/\|y\|$. Весь этот отрезок лежит внутри множества B, и поэтому норма не превосходит 1. Т.е. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. $\square$

Таким образом, задать норму это задать выпуклое "телесное" центрально симметричное тело в пространстве V. Это позволяет легко строить примеры норм.

Пример 1. $V = \mathbb{R}^n$, $B = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_1| \le 1, \dots, |x_n| \le 1\}$ — единичный куб. Соответствующая норма (называемая нормой ℓ_∞) задается равенством $\|(a_1, \dots, a_n)\|_\infty = \max_{k=1}^n |a_k|$.

Пример 2. $V = \mathbb{R}^n$, $B = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_1| + \dots + |x_n| \le 1\}$ (при $n = 2$ это квадрат, повернутый на $45°$ относительно осей координат; при $n = 3$ — правильный октаэдр). Соответствующая норма (называемая нормой ℓ_1) задается равенством $\|(a_1, \dots, a_n)\|_1 = \sum_{k=1}^n |a_k|$.

Пример 3. $V = C[0,1]$ — пространство непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Множество B состоит из функций, значения которых не превосходят по модулю 1. Соответствующая норма $\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Пример 4. $V = \mathbb{R}^n$, $B = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \le 1\}$ — единичный шар. Соответствующая норма (называемая нормой ℓ_2) задается равенством $\|(a_1, \dots, a_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$.

Последний пример допускает обобщение. Функция $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, называется *скалярным произведением*, если она линейна по обоим своим аргументам (как говорят, *билинейна*), симметрична ($(x,y) = (y,x)$) и обладает свойством положительной определенности: $(x,x) \ge 0$, и $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Пример скалярного произведения при $V = \mathbb{R}^n$ приводился в предыдущей лекции: $(x,y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, где $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$. Более полное описание скалярных произведений на $\mathbb{R}^n$ мы дадим ниже (теорема 3).

Пример 5. V — произвольное линейное пространство, $B = \{x \in V \mid (x,x) \le 1\}$, где $(\cdot,\cdot)$ — произвольное скалярное произведение. Соответствующая норма задается формулой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Для проверки того, что $\|\cdot\|$ — действительно норма, нужно доказать, что множество Ω обладает свойствами 1–3. Телесность и центральная симметричность очевидны, а выпуклость доказывается так же, как и в конкретном примере лекции 1 — нетрудно проверить, что при доказательстве использовались только свойства билинейности, симметричности и положительной определенности. В частности, остается верным неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

Теорема 2. *Норма* $\|\cdot\|$ *порождается скалярным произведением тогда и только тогда, когда она удовлетворяет* тождеству параллелограмма*:* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *для произвольных векторов* $x, y \in V$.

Доказательство. Если норма $\|\cdot\|$ порождается скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, то имеет место равенство $(x,y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$. Тем самым, норма порождается скалярным произведением тогда и только тогда, когда функция двух аргументов, определенная вышеприведенным равенством, билинейна, симметрична и положительно определена. Симметричность, очевидно, имеет место всегда. Ввиду равенства $(x,x) = \|x\|^2$ положительная определенность нормы эквивалентна положительной определенности функции $(\cdot,\cdot)$. Легко проверяется также, что билинейность этой функции эквивалентна тождеству параллелограмма. □

Опишем теперь скалярные произведения на пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Для любого скалярного произведения на пространстве* $\mathbb{R}^n$ *существует матрица* $Q = (q_{kl})$ *такая, что* $(x,y) = \sum_{k,l=1}^n q_{kl}x_k y_l$. *Матрица* Q *— симметрическая, т.е.* $q_{kl} = q_{lk}$ *для всех* k, l.

Доказательство. Обозначим $e_1, \dots, e_n$ стандартный базис в $\mathbb{R}^n$: $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, где единица стоит на i-ом месте. Тогда для всякого вектора $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ верно равенство $a = a_1e_1 + \dots + a_ne_n$. Обозначим $q_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} (e_k, e_l)$. Теперь в силу билинейности и симметричности скалярного произведения $(x,y) = \sum_{k,l=1}^n x_k y_l (e_k, e_l) = \sum_{k,l=1}^n q_{kl}x_k y_l$. Равенство $q_{kl} = q_{lk}$ следует из симметричности скалярного произведения. □

Утверждение, обратное теореме 3, неверно — для произвольной симметрической матрицы Q функция $\sum_{k,l=1}^n q_{kl}x_k y_l$ может не оказаться положительно определенной (хотя всегда является билинейной и симметричной). Для положительной определенности нужно наложить на коэффициенты q_{kl} условие (систему неравенств), называемое условием Сильвестра.