ЛЕКЦИЯ 3

Базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V со скалярным произведением называется *ортонормированным*, если $(e_i, e_j) = 1$ при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Очень важным является следующий процесс ортогонализации (процесс Грама):

Предложение 1. *Любой базис можно непрерывно продеформировать в ортонормированный. Иными словами, для всякого базиса $e_1, \dots, e_n$ существуют непрерывные вектор-функции $e_1(t), \dots, e_n(t)$, $0 \le t \le 1$ такие, что $e_i(0) = e_i$, $e_1(t), \dots, e_n(t)$ образуют базис при любом t, и базис $e_1(1), \dots, e_n(1)$ — ортонормированный.*

Доказательство. Процесс деформации будем вести в несколько этапов (по индукции). Для удобства написания формул на каждом этапе параметр деформации ("время") t будет изменяться от 0 до 1 — в дальнейшем мы заменим параметр так, чтобы *вся* деформация происходила за время $t \in [0,1]$.

В процессе доказательства нам постоянно нужно будет проверять, что некоторая система векторов $f_1, \dots, f_n \in V$ образует базис. Для этого мы будем использовать следующий принцип: если элементы некоторого базиса $e_1, \dots, e_n$ являются линейными комбинациями векторов $f_1, \dots, f_n$, то векторы $f_1, \dots, f_n$ сами образуют базис. Обратите внимание, что число векторов в каждой системе равно $n = \dim V$.

Первый этап (или база индукции) таков: умножим вектор e_1 на число $\lambda_1(t) = (1-t) + t/\|e_1\|$ (это непрерывная деформация). Система $\lambda_1(t)e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис при всех $t \in [0,1]$, поскольку $\lambda(t) \neq 0$. При $t = 1$ получаем $e_1' = \lambda_1(1)e_1$ и $\|e_1'\| = 1$.

Пусть теперь (шаг индукции) имеется базис $e_1', \dots, e_k', e_{k+1}, \dots, e_n$, для которого $(e_i', e_j') = 0$ при $i \neq j$ и 1 при $i = j$. Положим $e_{k+1}(t) = e_{k+1} - t(e_{k+1}, e_1')e_1' - \dots - t(e_{k+1}, e_k')e_k'$. Это непрерывная деформация, соединяющая вектор $e_{k+1} = e_{k+1}(0)$ с вектором $e_{k+1}' \stackrel{\text{def}}{=} e_{k+1}(1)$. Имеет место равенство $e_{k+1} = e_{k+1}(t) + t(e_{k+1}, e_1')e_1' + \dots + t(e_{k+1}, e_k')e_k'$, которое означает, что мы выразили элементы базиса $e_1', \dots, e_k', e_{k+1}, \dots, e_n$ через элементы системы векторов $e_1', \dots, e_k', e_{k+1}(t), e_{k+2}, \dots, e_n$. Поэтому указанная система образует базис при всех t. С другой стороны, $(e_{k+1}', e_i') = 0$ при $i \le k$. Осталось, как на первом шаге, непрерывно продеформировать вектор e_{k+1}' в вектор с нормой 1. □

Следствие 1. *Для любого скалярного произведения на линейном пространстве ортонормированные базисы существуют.*

Предложение 2. *Пусть $A \in \mathrm{GL}(V)$ — обратимый линейный оператор на пространстве V. Тогда формула $(x,y)_A \stackrel{\text{def}}{=} (Ax, Ay)$ определяет на пространстве V скалярное произведение. Указанная формула задает действие $\mathrm{GL}(V)$ на множестве всех скалярных произведений на V.*

Для доказательства нужно проверить (проделайте !), что выражение (Ax, Ay) билинейно, симметрично и положительно определено, и что $\big((\cdot,\cdot)_A\big)_B = (\cdot,\cdot)_{AB}$.

Следствие 2 (предложения 1)**.** *Построенное в предложении 2 действие $\mathrm{GL}(V)$ на множестве скалярных произведений транзитивно. Иными словами, для любых двух скалярных произведений $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$ (на одном и том же линейном пространстве V) существует такой обратимый линейный оператор $A : V \to V$, что $(x,y)_1 = (Ax, Ay)_2$.*

Доказательство. Рассмотрим базис $e_1, \dots, e_n$, ортонормированный в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_1$ и аналогичный базис $f_1, \dots, f_n$ для скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_2$. Рассмотрим линейный оператор A такой, что $Ae_i = f_i$ для всех i. Непосредственно проверяется, что для произвольных векторов $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ и $y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$ верно равенство $(x,y)_1 = \lambda_1\mu_1 + \dots + \lambda_n\mu_n = (Ax, Ay)_2$. □

Из общих свойств действий групп на множествах (см. задачи семинара 1) вытекает

Следствие 3. *Обратимые линейные преобразования пространства V, сохраняющие данное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, образуют подгруппу (обозначаемую $\mathrm{O}(V,(\cdot,\cdot))$) в группе $\mathrm{GL}(V)$. Подгруппы $\mathrm{O}(V,(\cdot,\cdot))$, соответствующие различным скалярным произведениям, сопряжены.*

Из формулы поляризации $(2(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ следует, что линейное преобразование $A \in \mathrm{O}(V,(\cdot,\cdot))$ тогда и только тогда, когда оно сохраняет соответствующую скалярному произведению $(\cdot,\cdot)$ норму.

Поскольку различные подгруппы $\mathrm{O}(V,(\cdot,\cdot))$ сопряжены, они изоморфны. Поэтому группа $\mathrm{O}(V,(\cdot,\cdot))$ как абстрактная группа не зависит от выбора скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$, а только от пространства V, т.е. от его размерности n. Эта группа обозначается $\mathrm{O}(n)$.

Пример 1. Пусть $V = \mathbb{R}^2$, и скалярное произведение стандартное. В этом случае группа $\mathrm{O}(2)$ состоит из всех поворотов вокруг начала координат и всех симметрий относительно прямых, проходящих через начало координат. Очевидно, все такие преобразования принадлежат $\mathrm{O}(2)$. Чтобы доказать, что других элементов в $\mathrm{O}(2)$ нет, зафиксируем в V ортонормированный базис e_1, e_2. Пусть $A \in \mathrm{O}(2)$, $f_1 = Ae_1, f_2 = Ae_2$. Базис f_1, f_2 — ортонормированный. Если ориентация этого базиса такая же, как у e_1, e_2, то поворот вокруг начала координат на угол, равный углу между векторами e_1 и f_1, переводит e_1 в f_1, а e_2 в f_2. Поскольку линейное преобразование полностью определяется своим действием на какой-нибудь базис (в данном случае на базис e_1, e_2), преобразование A и есть указанный поворот. В случае, когда ориентации базисов e_1, e_2 и f_1, f_2 различны, точно так же доказывается, что A — симметрия относительно прямой.

Теорема 1. *Группа $\mathrm{O}(n)$ является деформационным ретрактом группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.*

Напомним, что $A \subset B$ — деформационный ретракт, если существует семейство непрерывных отображений $M_t : B \to B$, $0 \leq t \leq 1$, непрерывно зависящих от параметра t и таких, что M_0 — тождественное отображение, $M_t|_A$ — тождественное отображение при любом t, и $M_1(B) = A$.

Доказательство. Зафиксируем в пространстве V ортонормированный базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Тогда возникает взаимно однозначное соответствие между элементами $\mathrm{GL}(V)$ и базисами в V: базису $f = (f_1, \ldots, f_n)$ соответствует оператор, переводящий каждый вектор e_i в вектор f_i. Ортонормированным базисам соответствуют элементы $\mathrm{O}(V)$. Пусть теперь $S \in \mathrm{GL}(V)$, f — соответствующий базис в V. Применим к f процесс Грама, описанный в предложении 1. Получится непрерывная деформация базиса $f(t)$, такая что $f(0) = f$ и $f(1)$ ортонормирован. Этой деформации соответствует непрерывная деформация операторов $M_t(S)$ такая, что $M_0(S) = S$ и $M_1(S) \in \mathrm{O}(V)$. Это и есть требуемая ретракция — для доказательства достаточно заметить, что деформация $M_t(S)$ непрерывно зависит не только от параметра t, но и от начальной точки (оператора) S и, кроме того, ортогональные операторы остаются при этой деформации на месте — если $S \in \mathrm{O}(V)$, то $M_t(S) \equiv S$. Оба этих утверждения следуют из конструкции Грама, приведенной в доказательстве предложения 1. □

Теорема 2. *Для каждого линейного преобразования A существует и единственно преобразование A^* (называемое сопряженным относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$), обладающее свойством $(Ax, y) = (x, A^*y)$ для всех $x, y, \in V$. Если базис $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный, то матрицы преобразований A и A^* отличаются транспонированием (заменой строк на столбцы и наоборот).*

Доказательство. Если (a_{ij}) — матрица преобразования A в ортонормированном базисе e_i, то, как нетрудно видеть, $a_{ij} = (e_i, Ae_j)$. Отсюда следует, что матрицы преобразований A и A^* в таком базисе отличаются транспонированием.

Существование A^*: возьмем ортонормированный базис, и рассмотрим преобразование A^*, матрица которого в этом базисе отличается от матрицы преобразования A транспонированием. Тогда равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$ выполнено, если x и y — базисные векторы. Но в силу билинейности скалярного произведения это равенство выполнено тогда и для любых векторов x и y.

Единственность A^*: возьмем ортонормированный базис, тогда матрица A^* в этом базисе отличается от матрицы преобразования A транспонированием, т.е. определена однозначно. Поэтому преобразование A^* тоже определено однозначно. □

В дальнейшем нам неоднократно понадобится следующее свойство скалярного произведения, называемое невырожденностью:

Лемма. *Если для любого вектора $y \in V$ выполнено равенство $(x, y) = 0$, то вектор x — нулевой.*

Доказательство. Положим $y = x$: тогда $0 = (x, x)$, откуда $x = 0$ в силу положительной определенности. □

Теорема 3. *Линейное преобразование A сохраняет скалярное произведение тогда и только тогда, когда $A^*A = E$.*

Доказательство. Пусть $(Ax, Ay) = (x, y)$ для всех $x, y \in V$. Тогда $(A^*Ax - x, y) \equiv 0$. Из леммы следует, что $A^*Ax - x \equiv 0$, т.е. $AA^* = E$. Обратное утверждение доказывается так же. □

Следствие. *Определитель матрицы ортогонального преобразования равен ± 1. Ортогональные преобразования с определителем 1 образуют в $\mathrm{O}(n)$ подгруппу (обозначаемую $\mathrm{SO}(n)$) индекса 2, а преобразования с определителем -1 — смежный класс по этой подгруппе.*

Доказательство. Напомним, что определитель матрицы линейного преобразования не зависит от базиса, в котором написана эта матрица. Для ортогонального преобразования A выберем ортонормированный базис, тогда $\det^2 A = \det A \cdot \det A^* = \det AA^* = \det E = 1$, откуда $\det A = \pm 1$. Если $\det A = \det B = 1$, то $\det AB = \det A \cdot \det B = 1$, и $\det A^{-1} = 1$, откуда следует, что $\mathrm{SO}(n)$ — подгруппа. Если $\det A = \det B = -1$, то $\det AB^{-1} = 1$, и $AB^{-1} \in \mathrm{SO}(n)$. Отсюда следует, что преобразования с определителем -1 образуют смежный класс. Поскольку других смежных классов нет (определитель равен или 1, или -1), индекс $\mathrm{SO}(n)$ в $\mathrm{O}(n)$ равен 2. $\square$

Последнее рассуждение можно сформулировать короче: отображение $A \mapsto \det A$ это гомоморфизм группы $\mathrm{O}(n)$ в группу из двух элементов $\{-1, 1\}$ (с операцией умножения). Поэтому ядро этого гомоморфизма — $\mathrm{SO}(n)$ — является подгруппой, прообраз точки -1 — смежным классом. Индекс подгруппы равен числу элементов образа, т.е. 2.