ЛЕКЦИЯ 4

Аффинным пространством называется множество L, для которого определено отображение $L \times L \to V$ в линейное пространство V, сопоставляющее каждой паре точек $a, b \in L$ вектор $\overrightarrow{ab} \in V$ так, чтобы выполнялись такие требования:

1. $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$;
2. Для всякого вектора $v \in V$ и для каждой точки $a \in L$ существует ровно одна точка $b \in L$ такая, что $\overrightarrow{ab} = v$.

Из свойств 1–2 вытекает немедленно, что $\overrightarrow{ab} = 0 \Leftrightarrow a = b$, а также $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$. Более того, свойство 2 позволяет отождествить L с V, а именно: зафиксируем какую-нибудь точку $a \in L$ и сопоставим каждому вектору $v \in V$ точку $b \in L$ такую, что $\overrightarrow{ab} = v$. Согласно свойству 2 это соответствие будет взаимно однозначным; обозначим его S_a. При разном выборе $a \in L$ соответствия S_a будут различны.

Пусть $W \subset V$ — линейное подпространство. Назовем точки $a, b \in L$ эквивалентными, если $\overrightarrow{ab} \in W$. Это действительно отношение эквивалентности (проверьте !); классы эквивалентности называются аффинными подпространствами, параллельными W. Аффинные подпространства размерности 0 это точки; аффинные подпространства размерности 1 естественно называть (аффинными) прямыми.

Преобразование $B : L \to L$ называется *аффинным*, если оно непрерывно и переводит равные векторы в равные векторы: $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt} \Rightarrow \overrightarrow{B(x)B(y)} = \overrightarrow{B(z)B(t)}$. Примером аффинного преобразования является параллельный перенос T_v на вектор $v \in V$, сопоставляющий каждой точке x такую точку y, что $\overrightarrow{xy} = v$ (здесь просто $\overrightarrow{T_v(x)T_v(y)} = \overrightarrow{xy}$). Обратимые аффинные преобразования образуют группу, которую мы будем обозначать $\mathrm{Aff}(L)$.

Пусть B — аффинное преобразование. Для каждого вектора $v \in V$ однозначно определен вектор $\widetilde{B}(v) \in V$ равенством $\widetilde{B}(v) = \overrightarrow{B(x)B(y)}$, где x, y — произвольная пара точек такая, что $\overrightarrow{xy} = v$. Таким образом, для каждого аффинного преобразования B определен оператор $\widetilde{B} : V \to V$.

Теорема 1. *Оператор $\widetilde{B}$ линеен. Сопоставление $B \mapsto \widetilde{B}$ является гомоморфизмом групп $\mathrm{Aff}(L) \to \mathrm{GL}(V)$, ядро которого состоит из всех параллельных переносов.*

Доказательство. Рассмотрим три точки $x, y, z \in L$ такие, что $\overrightarrow{xy} = v_1$, $\overrightarrow{yz} = v_2$. Тогда $\overrightarrow{xz} = v_1 + v_2$, и $\widetilde{B}(v_1 + v_2) = \overrightarrow{B(x)B(z)} = \overrightarrow{B(x)B(y)} + \overrightarrow{B(y)B(z)} = \widetilde{B}(v_1) + \widetilde{B}(v_2)$, т.е. оператор $\widetilde{B}$, как говорят, *аддитивен.*

Докажем теперь, что всякий непрерывный аддитивный оператор также и однороден, т.е. $\widetilde{B}(\lambda v) = \lambda\widetilde{B}(v)$. Прежде всего заметим, что $\widetilde{B}(0) = \widetilde{B}(0+0) = \widetilde{B}(0) + \widetilde{B}(0)$, откуда следует, что $\widetilde{B}(0) = 0$. Пусть сначала $\lambda \in \mathbb{N}$ — целое положительное число. Тогда $\widetilde{B}(\lambda v) = \widetilde{B}(v) + \dots + \widetilde{B}(v)$ (λ раз) $= \lambda\widetilde{B}(v)$. Если теперь $\lambda \in \mathbb{Z}$ отрицательно, то $-\lambda \in \mathbb{N}$, откуда $\widetilde{B}(\lambda v+(-\lambda)v) = \widetilde{B}(\lambda v)-\lambda\widetilde{B}(v) = \widetilde{B}(0) = 0$, т.е. $\widetilde{B}(\lambda v) = \lambda\widetilde{B}(v)$. Тем самым однородность доказана для целых λ.

Пусть теперь $\lambda = p/q \in \mathbb{Q}$. Мы знаем, что $q\widetilde{B}(\lambda v) = \widetilde{B}(q\lambda v) = \widetilde{B}(pv) = p\widetilde{B}(v)$, откуда вытекает однородность уже для рациональных λ. Для доказательства однородности при произвольном действительном λ мы воспользуемся непрерывностью $\widetilde{B}$ (это единственное место в доказательстве, где она требуется) и тем фактом, что всякое действительное число можно приблизить рациональными с любой точностью.

Тем самым доказано, что оператор $\widetilde{B}$ линеен. Если B обратим, то нетрудно видеть, что обратим и $\widetilde{B}$, причем $\widetilde{B^{-1}} = \widetilde{B}^{-1}$. Равенство $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$ очевидно, поэтому сопоставление $B \mapsto \widetilde{B}$ действительно является гомоморфизмом групп. Ядро этого гомоморфизма состоит из аффинных преобразований B, обладающих свойством $\overrightarrow{B(x)B(y)} = \overrightarrow{xy} \Leftrightarrow \overrightarrow{xB(x)} = \overrightarrow{yB(y)}$ для всех $x, y \in L$. Следовательно, вектор $v \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{xB(x)}$ не зависит от x, и B является параллельным переносом T_v. □

Замечание. От требования непрерывности преобразования B можно было бы избавиться — результат останется верен — но это сильно усложнит доказательство. См. книгу В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, “Геометрия”).

Следствие 1. *Обратимые аффинные преобразования переводят аффинные подпространства в аффинные подпространства той же размерности. Они сохраняют отношение длин параллельных отрезков (длины вычисляются по отношению к любой норме на пространстве V).*

Следствие 2. *Параллельные переносы образуют нормальную подгруппу группы $\mathrm{Aff}(L)$.*

Следующая теорема описывает, во что переходят аффинные преобразования при отождествлении аффинного пространства с линейным.

Теорема 2. *Пусть L — аффинное пространство, $a \in L$ и $B \in \mathrm{Aff}(L)$. Тогда отображение $C \stackrel{def}{=} S_a B S_a^{-1} : V \to V$ имеет вид $C(v) = Av + u$, где $A = \widetilde{B}, u = \overrightarrow{aB(a)}$. Для всякого отображения вида $C(v) = Av + u$ существует и единственно преобразование $B \in \mathrm{Aff}(L)$, для которого $C = S_a B S_a^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $v \in V$, и $p \in L$ такова, что $\overrightarrow{ap} = v$. Тогда имеем: $C(v) = S_a(B(S_a^{-1}(v))) = S_a(B(p)) = \overrightarrow{aB(p)} = \overrightarrow{aB(a)} + \overrightarrow{B(a)B(p)} = u + \widetilde{B}(\overrightarrow{ap}) = u + Av$. Обратно: пусть $C(v) = Av + u$ и $a \in L$. Положим $B = S_a^{-1} C S_a$. Тогда для произвольных точек $x, y \in L$ имеет место равенство $\overrightarrow{B(x)B(y)} = A\overrightarrow{xy}$. Тем самым, равные векторы переходят в равные, и преобразование B аффинно. Нетрудно также убедиться, что обратимость C, линейного преобразования $A = \widetilde{B}$ и аффинного преобразования B эквивалентны. □

Следствие. *Образом группы $\mathrm{Aff}(L)$ при гомоморфизме $B \mapsto \widetilde{B}$ является вся группа $\mathrm{GL}(V)$. Таким образом, $\mathrm{GL}(V)$ изоморфна факторгруппе группы $\mathrm{Aff}(L)$ по подгруппе параллельных переносов.*

Очевидно, группа параллельных переносов $T \subset \mathrm{Aff}(L)$ изоморфна линейному пространству V, рассматриваемому как группа по сложению.

Изучим действие аффинной группы на аффинном пространстве.

Теорема 3. *Действие* $\mathrm{Aff}(L)$ *на* L *транзитивно. Стабилизатор точки* $\mathrm{Stab}_a \subset \mathrm{Aff}(L)$ *изоморфен группе* $\mathrm{GL}(V)$. *Подгруппы* T *и* Stab_a *(для произвольного* $a \in L$*) порождают всю группу* $\mathrm{Aff}(L)$ *и пересекаются только по единичному элементу.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из того, что транзитивно действует уже группа параллельных переносов $T \subset \mathrm{Aff}(L)$. Второе утверждение следует из теоремы 2 (если $a = B(a)$, то $u = 0$). Третье утверждение тоже следует из теоремы 2: $Av + u$ есть композиция преобразования $P(v) = Av$ и преобразования $Q(v) = v + u$. Но $S_a^{-1}PS_a \in \mathrm{Stab}_a$, и $S_a^{-1}QS_a \in T$. Очевидно также, что параллельный перенос, сохраняющий некоторую точку, является тождественным преобразованием. □

Замечание. Несмотря на теорему 3 и нормальность подгруппы $T \subset \mathrm{Aff}(L)$ (следствие 2) группа $\mathrm{Aff}(L)$ не является прямым произведением своих подгрупп $\mathrm{Stab}_a \cong \mathrm{GL}(V)$ и $T \cong V$. Причина этого в том, что подгруппа Stab_a не является нормальной — сопряжение параллельным переносом на вектор v переводит Stab_a не в себя, а в подгруппу Stab_b, где $\overrightarrow{ab} = v$. Другие проявления того же феномена (разберитесь, почему того же самого): $Ax + u \neq A(x+u)$; или: множество смежных классов $\mathrm{Aff}(L)$ по стабилизатору точки отождествляется с аффинным пространством L, которое не имеет естественной структуры группы.

Назовем набор $a_1, \ldots, a_{n+1}$ точек n-мерного аффинного пространства *набором общего положения*, если векторы $\overrightarrow{a_1a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_1a_{n+1}}$ образуют базис. Нетрудно проверить (проверьте !), что это эквивалентно тому, что точки $a_1, \ldots, a_{n+1}$ не принадлежат никакому собственному аффинному подпространству. В частности, от порядка точек это понятие не зависит.

Теорема 4. *Аффинная группа* n*-мерного аффинного пространства действует точно и транзитивно на наборах из* $n+1$ *точки общего положения. Иными словами, для любых наборов* $a_1, \ldots, a_{n+1}$ *и* $b_1, \ldots, b_{n+1}$ *точек общего положения существует ровно одно преобразование* $B \in \mathrm{Aff}(L)$*, переводящее* $a_i \mapsto b_i$*,* $i = 1, \ldots, n+1$*.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что преобразование $B \in \mathrm{Aff}(L)$ полностью определяется преобразованием $\widetilde{B} \in \mathrm{GL}(V)$ и образом $B(a)$ одной (произвольной) точки. Рассмотрим преобразование B такое, что $B(a_1) = b_1$, а линейное преобразование $\widetilde{B}$ переводит базис $\overrightarrow{a_1a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_1a_{n+1}}$ в базис $\overrightarrow{b_1b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_1b_{n+1}}$. Тогда $B(a_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n+1$. Очевидно также, что других возможностей нет. □

Пример 1. Из теоремы 4 следует, что все треугольники на плоскости аффинно эквивалентны. Это позволяет мгновенно доказать, что три медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке, делящей каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины. Действительно, аффинное преобразование сохраняет отношение длин параллельных отрезков (следствие 1 теоремы 1). Поэтому если два треугольника T_1 и T_2 аффинно эквивалентны, и для T_1 утверждение верно, то оно верно и для T_2. Все треугольники на плоскости эквивалентны правильному, для которого утверждение очевидно. Так же доказывается n-мерный аналог этого утверждения: вместо треугольников нужно брать симплексы, а медиана, по определению, соединяет вершины с центром тяжести (точкой пересечения медиан) противолежащей $(n-1)$-мерной грани. Отношение будет $n:1$.

Рассмотрим теперь в $n+1$-мерном пространстве W гиперплоскость L, не проходящую через начало координат. Если $x, y \in L$, то $x-y \in V$, где V — гиперплоскость, параллельная L и проходящая через начало координат. Таким образом, в L имеется структура n-мерного аффинного пространства.

Теорема 5. *Нормализатор* Norm_L *гиперплоскости* L *в группе* $\mathrm{GL}(W)$ *изоморфен аффинной группе* $\mathrm{Aff}(L)$.

Напомним, что нормализатор состоит из преобразований $X \in \mathrm{GL}(W)$ таких, что если $v \in L$, то и $Xv \in L$ (но не обязательно $Xv = v$!)

Доказательство. Сопоставим произвольному элементу $X \in \mathrm{Norm}_L$ его ограничение $X|_L$ на гиперплоскость L. Очевидно, что $X|_L$ — аффинное преобразование (посмотрите определение !). Тем самым это соответствие задает гомоморфизм групп $\mathrm{Stab}_L \to \mathrm{Aff}(L)$. Покажем, что это изоморфизм.

Эпиморфность: любое аффинное преобразование B пространства L можно продолжить до линейного преобразования X всего пространства W. Чтобы сделать это, для вектора $v \in V$ положим $Xv \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widetilde{B}v \in V$. Для любого другого вектора v существует и единственно число $\lambda \neq 0$ такое, что $\lambda v \in L$. В этом случае положим $Xv \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\lambda}B(\lambda v)$. То, что X сохраняет L, очевидно; доказательство линейности X — хорошее упражнение (проделайте !).

Мономорфность: пусть $X \in \mathrm{Norm}_L$, и $X|_L$ — тождественное преобразование. Выберем в пространстве W базис $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ такой, что $e_1, \dots, e_n$ образуют базис в V, а конец вектора e_{n+1} принадлежит L. Тогда L состоит из векторов, $(n+1)$-ая координата которых в базисе e_i равна 1. Очевидно, векторы выбранного базиса остаются неподвижными при преобразовании X, и поэтому $X = E$. $\square$

В базисе $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ матрицы преобразований $X \in \mathrm{Norm}_L$ имеют вид

$$\left(\begin{array}{c|c} A & u \\ - & - \\ 0\dots0 & 1 \end{array}\right)$$

Здесь A — матрица $n \times n$, являющаяся матрицей преобразования $\widetilde{B}$ (где $B = X|_L$) в базисе $e_1, \dots, e_n$, а $u = (u_1, \dots, u_n)$ — записанный в том же базисе вектор u из теоремы 2. Здесь при отождествлении $S_a : L \leftrightarrow V$ в качестве точки a берется конец вектора e_{n+1}.