ЛЕКЦИЯ 5

Определение 1. Проективным пространством PW размерности n называется множество одномерных линейных подпространств (прямых, проходящих через начало координат) в $(n+1)$-мерном линейном пространстве W.

Иногда говорят, что PW — *проективизация* линейного пространства W.

Если в пространстве W ввести базис, то прямая, содержащая ненулевой вектор w с координатами $(w_0, \dots, w_n)$, состоит из векторов с координатами $(\lambda w_0, \dots, \lambda w_n)$, где λ пробегает все действительные числа. Таким образом, можно дать

Определение 2. Рассмотрим множество наборов $(w_0, \dots, w_n)$ из $n+1$ числа, не равного одновременно нулю. Назовем два набора $(w_0, \dots, w_n)$ и $(w_0', \dots, w_n')$ эквивалентными, если $w_i' = \lambda w_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$ и некоторого $\lambda \neq 0$. Множество классов эквивалентности называется n-мерным проективным пространством. Если в этом определении заменить числа (действительные) элементами произвольного поля $\mathbb{F}$, то получим определение проективного пространства размерности n над полем $\mathbb{F}$.

Часто в обозначениях не указывают явно линейное пространство W, а только поле и/или размерность: $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ и т.п.

Обозначение: $P^n = \{(w_0 : \dots : w_n)\}$. Числа $w_0, \dots, w_n$ (определенные с точностью до пропорциональности), называются однородными координатами точки проективного пространства.

Рассмотрим сначала топологию проективных пространств.

Предложение 1. *Пространство $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфно окружности S^1, а пространство $\mathbb{C}P^1$ — двумерной сфере S^2.*

Доказательство. Оба гомеоморфизма строятся с помощью одного и того же приема, называемого стереографической проекцией. Для $\mathbb{R}P^1$ рассмотрим окружность Ω единичного радиуса, касающуюся оси абсцисс в начале координат. Ось абсцисс пересекает Ω в начале координат, а любая другая прямая ℓ — в начале координат и еще одной точке $p(\ell) \in \Omega$. Очевидно, сопоставив прямой $\ell \in \mathbb{R}P^1$ точку $p(\ell) \in \Omega$ (а оси абсцисс — начало координат $0 \in \Omega$), мы получим требуемый гомоморфизм. Прямой, направляющий вектор которой имеет координаты $(a, b) \neq (0, 0)$, соответствует точка с координатами $x = 2ab/(a^2 + b^2), y = 2b^2/(a^2 + b^2)$. Можно и не обращаясь к рисунку, проверить, что $x^2 + (y-1)^2 = 1$, и для любой пары чисел x, y с таким соотношением пара (a, b) существует и единственна с точностью до пропорциональности.

В комплексном случае реализуем двумерную сферу Ω как подмножество $\mathbb{C}^2$, заданное условиями $|z|^2 + |w-1|^2 = 1$, $w = \bar{w}$ (т.е. $w \in \mathbb{R}$). Комплексная прямая, проходящая через точку $(a, b) \neq (0, 0)$ это множество точек вида $(\lambda a, \lambda b)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Нетрудно вычислить, что эта прямая пересекает данную сферу в точке $\lambda = 0$ и в точке $p(a, b)$, для которой $\lambda = -2\bar{b}/(|a|^2 + |b|^2)$. Сопоставляя прямой, проведенной через (a, b), точку $p(a, b)$ (которая есть начало координат, если $b = 0$), получим требуемый гомеоморфизм. $\square$

Предложение 2. *Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно n-мерной сфере, у которой попарно отождествлены диаметрально противоположные точки. Также $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно n-мерному шару, у которого попарно отождествлены диаметрально противоположные точки границы.*

Доказательство. Прямая в $n+1$-мерном пространстве W, направляющий вектор которой есть $v \neq 0$, пересекается со сферой $\Omega = \{w \mid |w| = 1\}$ в двух диаметрально противоположных точках: $w = \pm v/|v|$. Этим доказано первое утверждение. Рассмотрим в W n-мерное подпространство V, делящее W на два полупространства — верхнее и нижнее. Из двух рассмотренных выше точек пересечения одна лежит в верхнем полупространстве, одна в нижнем — либо обе они лежат на пересечении $\Omega \cap V$. В первом случае сопоставим прямой ортогональную проекцию "верхней" точки на V — эта проекция лежит во внутренности шара $\{v \in V \mid |v| \leq 1\}$. Во втором случае оставим все как есть. $\square$

Проективным подпространством $Q \subset PW$ называется проективизация линейного подпространства $V \subset W$. Проективные пространства (и подпространства) размерности 1 естественно называть проективными прямыми.

Зафиксируем в W гиперплоскость L, не проходящую через начало координат, и пусть V — параллельная ей гиперплоскость, проходящая через начало координат. Тогда все прямые в W — т.е., точки $P^n = PW$ — разбиваются на два класса: прямые, пересекающие L, и прямые, лежащие в V. Первые находятся во взаимно однозначном соответствии с точками L (прямой сопоставляется ее точка пресечения с L) и, тем самым, образуют n-мерное аффинное пространство A^n. Вторые же образуют проективное пространство $P^{n-1} = PV$ размерности $n-1$. Тем самым, получено представление $P^n = P^{n-1} \sqcup A^n$. Если базисные векторы $e_1, \dots, e_n$ лежат в подпространстве V, а конец вектора e_0 — в гиперплоскости L, то аффинное подпространство $A^n \subset P^n$ состоит из наборов $(w_0 : \dots : w_n)$, в которых $w_0 \neq 0$, а дополнительное проективное подпространство P^{n-1} — из наборов с $w_0 = 0$. В первом случае $(w_0 : \dots : w_n) = (1 : w_1/w_0 : \dots : w_n/w_0)$; числа $w_1/w_0, \dots, w_n/w_0$ (определенные однозначно) называются неоднородными координатами точки. Данному набору однородных координат соответствует $n+1$ набор неоднородных координат — k-й набор ($k = 1, \dots, n+1$) определен для точек с $w_k \neq 0$. Иными словами, проективное пространство P^n покрывается (с пересечениями) объединением $n+1$ аффинного подпространства размерности n: $P^n = A_0^n \cup \dots \cup A_n^n$. Заметим также, что разложение $P^n = P^{n-1} \sqcup A^n$ можно продолжить по индукции: $P^n = A^n \sqcup A^{n-1} \sqcup \dots \sqcup A^1 \sqcup P^0$; последнее пространство состоит из одной точки.

В проективном пространстве любые две проективные прямые ℓ_1, ℓ_2, лежащие в одной проективной плоскости, пересекаются (ровно в одной точке, если они различны). Может оказаться, что $\ell_1 \cap \ell_2 \in PV$ (из разложения $PW = PV \sqcup A$). Тогда $\ell_1 \cap A$ и $\ell_2 \cap A$ — параллельные аффинные прямые. Т.е. проективное подпространство $P^{n-1} = PV$ состоит из "бесконечно удаленных точек" аффинного пространства A; параллельные прямые "пересекаются в бесконечности".

В случае $\mathbb{R}P^1$ и $\mathbb{C}P^1$ разбиение $P^1 = A^1 \sqcup P^0$ это разбиение окружности (соотв., двумерной сферы) на точку и все остальное. В случае $\mathbb{R}P^2 = A^2 \sqcup \mathbb{R}P^1$ мы получаем (с точностью до гомеоморфизма) разбиение на открытый диск (которому гомеоморфно A^2) и окружность. Однако эти части "прилегают" друг к другу нетривиальным образом:

Предложение 3. *Малая окрестность $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$ гомеоморфна листу Мебиуса.*

Доказательство. Из конструкции, аналогичной доказательству предложения 2, видно, что указанная окрестность гомеоморфна множеству, заданному условиями $x^2+y^2+z^2 = 1$, $-\varepsilon \le z \le \varepsilon$, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки. Тем самым окрестность, гомеоморфна "полоске" $\{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1, -\varepsilon \le z \le \varepsilon, y \le 0\}$, у которой точки границы отождествлены с перекруткой: $(x, 0, z) \sim (-x, 0, -z)$ (а остальные точки ни с чем не отождествляются). Это и есть лист Мебиуса. □

Обратимые линейные преобразования пространства W переводят прямые в прямые, и, тем самым, порождают некоторые преобразования проективного пространства PW. Такие преобразования называются проективными. Проективные преобразования образуют группу, обозначаемую $\mathrm{PGL}(W)$. По определению, эта группа является образом группы $\mathrm{GL}(W)$ при естественном гомоморфизме (линейное преобразование рассматривается как преобразование множества прямых, а не точек).

Теорема 1. *Ядро этого гомоморфизма состоит из всех растяжений — операторов $W \to W$ вида λE, где E — тождественное отображение, а $\lambda \neq 0$.*

Доказательство. Очевидно, преобразования вида λE оставляют на месте все прямые в W, проходящие через начало координат, и, тем самым, индуцируют тождественное преобразование проективного пространства. Обратно, пусть преобразование $X \in \mathrm{GL}(W)$ оставляет все прямые на месте. Тем самым, $Xw = \lambda w$ для каждого вектора w, и нужно доказать, что λ для всех w одно и то же. Пусть $Xw_1 = \lambda_1 w_1$, $Xw_2 = \lambda_2 w_2$, и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда векторы w_1 и w_2 не пропорциональны. С другой стороны $X(w_1 + w_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda(w_1 + w_2) \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)w_1 + (\lambda - \lambda_2)w_2 = 0$. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, среди чисел $\lambda - \lambda_1$ и $\lambda - \lambda_2$ хотя бы одно отлично от нуля, и, следовательно, векторы w_1 и w_2 линейно зависимы. Противоречие. □

Таким образом, $\mathrm{PGL}(W) = \mathrm{GL}(W)/\{\lambda E\}$ — группа невырожденных матриц, элементы которых рассматриваются с точностью до пропорциональности.

Рассмотрим простейший случай проективной прямой ($n = 1$). Она состоит из точек вида $(x : y) \sim (x/y : 1)$ с $y \neq 0$ — такую точку мы будем обозначать просто $\xi \stackrel{\text{def}}{=} x/y \in \mathbb{R}$ — и "бесконечно удаленной" точки $(x : 0) \sim (1 : 0) \stackrel{\text{def}}{=} \infty$. В неоднородных координатах проективное преобразование, заданное матрицей $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, есть $(x : y) \mapsto (ax + by : cx + dy)$, а в неоднородной координате ξ это дробно-линейное преобразование $\xi \mapsto \frac{a\xi+b}{c\xi+d}$. В последней записи подразумевается, что $-d/c \mapsto \infty$, $\infty \mapsto a/c$. Таким образом, $\mathrm{PGL}(1)$ это группа дробно-линейных преобразований прямой. Преобразования с $c = 0$, образуют, как легко видеть, в $\mathrm{PGL}(1)$ подгруппу Stab_∞, состоящую из преобразований, сохраняющих бесконечно удаленную точку. Эта подгруппа изоморфна группе $\mathrm{Aff}(1)$, состоящей из линейных неоднородных преобразований $\xi \mapsto p\xi + q$.

Обобщением этого примера является

Теорема 2. *Пусть $PV \subset PW$ — гиперплоскость. Тогда подгруппа $\mathrm{Norm}_{PV} \subset \mathrm{PGL}(W)$ изоморфна $\mathrm{Aff}(L)$, где $L \subset W$ — гиперплоскость, не проходящая через начало координат и параллельная подпространству $V \subset W$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что преобразование из Norm_{PV} является образом (при стандартном гомоморфизме $\mathrm{GL}(W) \to \mathrm{PGL}(W)$) линейного преобразования пространства W, переводящего L в параллельную гиперплоскость. Совокупность таких преобразований после факторизации по растяжениям дает множество линейных преобразований пространства W, сохраняющих L. Но известно, что эта совокупность изоморфна группе $\mathrm{Aff}(L)$. $\square$