ЛЕКЦИЯ 6

В предыдущей лекции было доказано, что аффинные преобразования проективны: $\mathrm{Aff}(n) \subset \mathrm{PGL}(n)$. Обратное неверно — проективная группа существенно больше аффинной, как свидетельствует такая теорема. Назовем набор $a_1, \ldots, a_{n+2}$ точек n-мерного проективного пространства PW набором общего положения, если соответствующие векторы $v_1, \ldots, v_{n+2} \in W$ обладают таким свойством: любые $n+1$ из них образуют базис. Нетрудно видеть, что это эквивалентно тому, что никакая $n+1$ из выбранных точек не лежит в собственном проективном подпространстве пространства PW.

Теорема 1. *Группа* $\mathrm{PGL}(n)$ *действует точно и транзитивно на наборах из* $n+2$ *точек общего положения. Иными словами, для любых наборов* $a_1, \ldots, a_{n+2}$ *и* $b_1, \ldots, b_{n+2}$ *точек общего положения существует ровно одно преобразование* $B \in \mathrm{PGL}(n)$, *переводящее* $a_i \mapsto b_i$, $i = 1, \ldots, n+2$.

Доказательство. Будем считать точки $a_1, \ldots, a_{n+2}$ и $b_1, \ldots, b_{n+2}$ ненулевыми векторами в W (выберем на каждой прямой по вектору). Требуется найти линейное преобразование $X : W \to W$ такое, что $Xa_i = x_i b_i$, где $x_1, \ldots, x_i$ — какие-то числа. Разложим вектор a_{n+2} по базису $a_1, \ldots, a_{n+1}$, а вектор b_{n+2} по базису $b_1, \ldots, b_{n+1}$: $a_{n+2} = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$, $b_{n+2} = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_{n+1} b_{n+1}$. Среди чисел λ_i нет нулей: если $\lambda_k = 0$, то векторы $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_{n+2}$ не образуют базиса. Равенство $Xa_{n+2} = b_{n+2}$ задает на числа x_i систему условий: $\lambda_i x_i = \mu_i x_{n+2}$, которая определяет эти числа однозначно с точностью до пропорциональности. С другой стороны, числа $x_1, \ldots, x_{n+1}$ задают оператор X однозначно, поскольку $a_1, \ldots, a_{n+1}$ — базис. □

Напомним, что аффинная группа действует транзитивно только на наборах из $n+1$ точки, а проективная — $n+2$. В частности, все плоские четырехугольники проективно эквивалентны.

Примером применения теоремы 1 является такое утверждение:

Пример 1 (теорема Дезарга). Пусть прямые aa', bb' и cc' пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения прямых $ab \cap a'b'$, $ac \cap a'c'$ и $bc \cap b'c'$ лежат на одной прямой.

Доказательство. Утверждение теоремы Дезарга является проективно инвариантным — если оно верно для какой-либо конфигурации, то верно и для всех конфигураций, получающихся из данной проективным преобразованием. В силу теоремы 1 можно проективным преобразованием отправить две произвольных точки на бесконечно удаленную прямую. Сделаем это с точками $ab \cap a'b'$ и $bc \cap b'c'$. Тогда получится такое (очевидное) утверждение: пусть прямые aa', bb' и cc' пересекаются в точке o, прямая ab параллельна прямой $a'b'$, прямая bc параллельна прямой $b'c'$. Тогда прямая ac параллельна прямой $a'c'$. □

Напомним, что линейным пространством, двойственным к линейному пространству W, называется пространство W^* линейных функционалов на W (линейных отображений $W \to \mathbb{R}$). Пространства W и W^* изоморфны (если конечномерны): произвольному базису $e_0, \ldots, e_n \in W$ соответствует двойственный базис $f_0, \ldots, f_n \in W^*$, где функционалы f_k определяются равенствами: $f_k(e_l) = 0$, если $k \neq l$, и $= 1$, если $k = l$. Таким образом, изоморфизм между W и W^* зависит от выбора базиса. Пространство, двойственное к двойственному, также изоморфно исходному, причем в данном случае изоморфизм можно сделать каноническим: точке $e \in W$ соответствует функционал на W^* (т.е. элемент W^{**}), значение которого на функционале $f \in W$ равно $f(e)$.

Произвольному подпространству $V \subset W$ можно сопоставить подпространство $\mathrm{Ann}(V) \subset W^*$, состоящее из всех функционалов, равных нулю на произвольном векторе $e \in V$. Нетрудно показать, что $\dim \mathrm{Ann}(V) = \dim W - \dim V$, и что $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(V)) = V$ при отождествлении $W = W^{**}$, указанном выше. Также имеет место

Предложение 1. *Пусть $V_1, V_2 \subset W$ — линейные подпространства, V — линейная оболочка V_1 и V_2 (т.е. линейное подпространство наименьшей размерности, содержащее как V_1, так и V_2). Тогда $\mathrm{Ann}(V) = \mathrm{Ann}(V_1) \cap \mathrm{Ann}(V_2)$, а подпространство $\mathrm{Ann}(V_1 \cap V_2)$ является линейной оболочкой $\mathrm{Ann}(V_1)$ и $\mathrm{Ann}(V_2)$.*

Иными словами, операция пересечения двойственна к операции взятия линейной оболочки. Доказательство предложения 1 — упражнение.

Подпространству $V \subset W$ размерности $k+1$ соответствует проективное подпространство $PV \subset PW$ размерности k. Пересечению подпространств соответствует пересечение их проективизаций, а линейной оболочке — проективная оболочка (определение очевидно). Кроме того, можно определить подпространство $PV^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} P\,\mathrm{Ann}(V) \subset PW^*$ в двойственном проективном пространстве; размерность PV^* равна $n-k-1$, где $\dim W = n+1$. Так, точкам ($k = 0$) на проективной плоскости ($n = 2$) двойственны прямые, а прямым — точки. Эта конструкция в сочетании с предложением 1 позволяет для каждого утверждения о проективных пространствах и подпространствах построить двойственное утверждение — оно будет относиться к двойственному проективному подпространству, которое, впрочем, изоморфно исходному.

Пример 2. **Утверждение.** *Через любые n точек в n-мерном проективном пространстве проходит гиперплоскость (например, через любые две точки проективной плоскости — прямая). Если точки находятся в общем положении, то гиперплоскость единственна.*

Двойственное утверждение. *Любые n гиперплоскостей в n-мерном проективном пространстве (например, любые две прямые на проективной плоскости) пересекаются. Если гиперплоскости находятся в общем положении, то пересечение состоит из одной точки.*

Пример 3. Утверждение, двойственное к теореме Дезарга: пусть точки пересечения прямых $\alpha \cap \alpha'$, $\beta \cap \beta'$ и $\gamma \cap \gamma'$ лежат на одной прямой. Тогда прямые, проведенные через точки: $\alpha \cap \beta$ и $\alpha' \cap \beta'$, $\alpha \cap \gamma$ и $\alpha' \cap \gamma'$, $\beta \cap \gamma$ и $\beta' \cap \gamma'$, пересекаются в одной точке. Нетрудно видеть, что это утверждение, обратное теореме Дезарга. Отметим еще раз, что оно не нуждается в отдельном доказательстве, а следует из самой теоремы Дезарга по двойственности.

Двойственность между линейными пространствами распространяется и на линейные операторы. Напомним, что оператор $A^*: W^* \to W^*$ называется сопряженным к оператору $A: W \to W$, если $\ell(Ax) = (A^*\ell)(x)$ для всех векторов $x \in W$ и функционалов $\ell \in W^*$.

Предложение 2. *Для всякого линейного оператора A линейный оператор A^* существует и единствен. Имеет место равенство $(AB)^* = B^*A^*$. Матрица оператора A в некотором базисе $e_0, \ldots, e_n$ и матрицв A^* в двойственном базисе $f_0, \ldots, f_n$ отличаются транспонированием.*

Доказательство — упражнение.

Следствие. *Стабилизатор точки в группе $\mathrm{PGL}(n)$ изоморфен аффинной группе $\mathrm{Aff}(n)$.*

Доказательство. Согласно предложению 2 соответствие $A \mapsto (A^{-1})^*$ является автоизоморфизмом группы $\mathrm{GL}(W)$. Оно порождает автоизоморфизм группы $\mathrm{PGL}(n)$, который взаимно однозначно переводит стабилизатор точки в нормализатор объекта, двойственного точке, т.е. гиперплоскости. Нормализатор гиперплоскости изоморфен $\mathrm{Aff}(n)$. □

Можно рассматривать двойственные объекты для множеств более сложных, чем подпространства. Например, пусть $\gamma(t)$ — кривая на проективной плоскости, имеющая при каждом t касательную прямую T_t. Этой прямой двойственна точка T'_t на двойственной проективной плоскости. Эти точки заметают новую кривую γ^*, которая называется проективно двойственной к γ.

Назовем кривую γ гладко выпуклой, если она имеет в каждой точке касательную, и всякая ее касательная не имеет с кривой общих точек, кроме точки касания.

Теорема 2. *Кривая γ^*, двойственная к гладко выпуклой кривой γ, гладко выпукла. Кривая, двойственная к γ^*, совпадает с γ.*

Доказательство. Рассмортрим прямую (секущую), проходящую через точки a_1 и a_2 кривой γ^*. Точкам двойственны касательные T_{b_1} и T_{b_2} к кривой γ, а секущей двойственна точка их пересечения. Если $a_1, a_2 \to a$, то $b_1, b_2 \to b$, и в силу выпуклости γ точка пересечения касательных тоже стремится к b. Секущая стремится к касательной прямой T_a кривой γ^*, которая, тем самым, двойственна точке b кривой γ. Отсюда следует, что кривая γ^* имеет в каждой точке касательную, и что $\gamma^{**} = \gamma$.

Предположим, что касательная T_a к кривой γ^* пересекает ее в точке p, отличной от точки касания a. Двойственная картинка — касательная к кривой γ в некоторой точке q (она двойственна p) пересекает γ в точке b (двойственной к T_a). Такая ситуация невозможна в силу выпуклости γ. Значит, γ^* тоже выпукла. □

Замечание. Процедура построения двойственной кривой и доказательство теоремы 2 носят локальный характер. Поэтому теорема 2 верна не только для гладко выпуклых кривых, но и для кусочно-выпуклых кривых, имеющих в каждой точке касательную. Этот класс весьма широк — такие кривые, например, могут быть негладкими (иметь точки возврата).