ЛЕКЦИЯ 7

Эта лекция представляет собой экскурс в топологию. Мы определим для произвольного топологического пространства X важную характеристику — *фундаментальную группу* $\pi_1(X)$, докажем ее простейшие свойства и вычислим ее для нескольких топологических пространств, встречавшихся в данном курсе.

Отметим в изучаемом топологическом пространстве X точку b. *Петлей* в пространстве X называется произвольное непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \to X$ такое, что $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. *Гомотопией петель* называется непрерывное отображение $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to X$ такое, что для каждого $\tau \in [0,1]$ отображение $\Gamma|_{[0,1]\times\{\tau\}} = \Gamma(\cdot, \tau) : [0,1] \to X$ — петля. Последнее определение, в частности, предполагает, что $\Gamma(0,\tau) = \Gamma(1,\tau) \equiv b$ — начальная точка остается при гомотопии неподвижной. Петли γ_0 и γ_1 называются гомотопными, если существует гомотопия Γ, соединяющая эти петли, т.е. такая, что $\gamma_i(x) = \Gamma(x,i)$, $i = 0,1$. Отношение гомотопности петель является отношением эквивалентности; множество классов эквивалентности обозначается $\pi_1(X,b)$.

Произведением петель γ_1 и γ_2 называется петля $\gamma(t) = \begin{cases}\gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2\\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 \le t \le 1\end{cases}$.

Теорема 1. *Операция умножения петель порождает корректно определенное умножение на множестве $\pi_1(X,b)$. Относительно этого умножения $\pi_1(X,b)$ является группой. Если пространство X линейно связно, то группы $\pi_1(X,b)$ при различных b изоморфны.*

Построенная группа (особенно в линейно связном случае, когда она не зависит от отмеченной точки b) называется *фундаментальной группой* пространства X.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения нужно показать, что если $\gamma_1 \sim \gamma_1'$, $\gamma_2 \sim \gamma_2'$, то $\gamma_1 \circ \gamma_2 \sim \gamma_1' \circ \gamma_2'$. Действительно, пусть Γ_1 — гомотопия, соединяющая γ_1 и γ_1', а Γ_2 — гомотопия, соединяющая γ_2 и γ_2'. Тогда нетрудно проверить, что гомотопия, соединяющая $\gamma_1 \circ \gamma_2$ и $\gamma_1' \circ \gamma_2'$, задается формулой $\Gamma(t,\tau) = \begin{cases}\Gamma_1(2t,\tau), & 0 \le t \le 1/2\\ \Gamma_2(2t-1,\tau), & 1/2 \le t \le 1\end{cases}$.

Умножение в $\pi_1(X,b)$ имеет единицу — ею служит класс "тождественной" петли $e(t) \equiv b$. Доказательство того, что $\gamma \circ e \sim \gamma$ производится заменой параметра: в качестве гомотопии нужно взять $\Gamma(t,\tau) = \begin{cases}\gamma((2-\tau)t), & 0 \le t \le 1/(2-\tau)\\ b, & 1/(2-\tau) \le t \le 1\end{cases}$.

Для доказательства ассоциативности умножения нужно построить гомотопию, соединяющую $(\gamma_1 \circ \gamma_2) \circ \gamma_3$ и $\gamma_1 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_3)$. Такая гомотопия тоже будет "заменой параметра", аналогичной предыдущему пункту — формулы не приводим за очевидностью.

Класс петли $\gamma^{-1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(1-t)$ обратен (в $\pi_1(X,b)$) классу петли γ. Гомотопия, соединяющая e с $\gamma \circ \gamma^{-1}$: $\Gamma(t,\tau) = \begin{cases}\gamma(2t), & 0 \le t \le \tau/2,\\ \gamma(\tau), & \tau/2 \le t \le 1-\tau/2,\\ \gamma(2-2t), & 1-\tau/2 \le t \le 1\end{cases}$. Таким образом, $\pi_1(X,b)$ — группа.

Пусть $b_1, b_2 \in X$, и X линейно связно. Тогда существует непрерывная кривая $\varphi(t) \in X$ такая, что $\varphi(0) = b_1$, $\varphi(1) = b_2$. Пусть γ — петля в X с началом в b_2. Тогда $\gamma_\varphi(t) = \begin{cases}\varphi(3t), & 0 \le t \le 1/3,\\ \gamma(3t-1), & 1/3 \le t \le 2/3,\\ \varphi(3-3t), & 2/3 \le t \le 1\end{cases}$ является петлей с началом в b_1. Нетрудно проверить, что отображение $\gamma \mapsto \gamma_\varphi$ выдерживает гомотопию (т.е. если $\gamma_1 \sim \gamma_2$, то $(\gamma_1)_\varphi \sim (\gamma_2)_\varphi$), и поэтому отображает $\pi_1(X,b_2)$ в $\pi_1(X,b_1)$. Также проверяется, что $(\gamma_1 \circ \gamma_2)_\varphi \sim (\gamma_1)_\varphi \circ (\gamma_2)_\varphi$, т.е. это отображение — гомоморфизм групп. Также если $\tilde\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(1-t)$ — кривая, соединяющая b_2 с b_1, то $(\gamma_\varphi)_{\tilde\varphi} \sim \gamma$. Отсюда следует, что у приведенного гомоморфизма есть обратный, и, тем самым, он является изоморфизмом. $\square$

Пример 1. Если X состоит из одной точки, то $\pi_1(X)$ — группа из одного элемента.

Пусть $p : X_1 \to X_2$ — непрерывное отображение такое, что $p(b_1) = b_2$. Тогда для произвольной петли γ в X_1 с началом в b_1 формула $(p_*(\gamma))(t) = p(\gamma(t))$ определяет петлю $p_*(\gamma)$ в X_2 с началом b_2.

Теорема 2. *Отображение p_* порождает корректно определенный гомеоморфизм групп $\pi_1(X_1, b_1) \to \pi_1(X_2, b_2)$. Если отображения p_0 и p_1 гомотопны (в классе отображений $X_1 \to X_2$, переводящих b_1 в b_2), то гомоморфизмы $(p_0)_*$ и $(p_1)_*$ совпадают. Имеет место равенство $(p_0 \circ p_1)_* = (p_0)_* \circ (p_1)_*$.*

Доказательство. Для доказательства того, что $p_* : \pi_1(X_1, b_1) \to \pi_1(X_2, b_2)$ корректно определен, нужно доказать, что если $\gamma_1 \sim \gamma_2$, то $p_*(\gamma_1) \sim p_*(\gamma_2)$. В качестве гомотопии нужно взять $\Gamma_p(t,\tau) = p(\Gamma(t,\tau))$, где Γ — гомотопия, соединяющая γ_1 и γ_2.

Гомоморфность p_* следует из очевидного равенства $p_*(\gamma_1 \circ \gamma_2) = p_*(\gamma_1) \circ p_*(\gamma_2)$ (т.е. гомоморфность имеет место еще до факторизации по гомотопиям). Если p_0 и p_1 соединяются гомотопией $P(x,\tau)$ ($x \in X_1,\ \tau \in [0,1]$), то петли $(p_0)_*(\gamma)$ и $(p_1)_*(\gamma)$ для произвольного γ соединяются гомотопией $\Gamma(t,\tau) = P(\gamma(t),\tau)$, поэтому $(p_0)_* = (p_1)_*$.

Последнее утверждение теоремы следует непосредственно из определения. □

Следствие 1. *Если пространства X_1 и X_2 гомотопически эквивалентны (как пространства с отмеченными точками b_1 и b_2), то их фундаментальные группы изоморфны.*

Доказательство. Гомотопическая эквивалентность означает, что существуют непрерывные отображения $p : X_1 \to X_2$ и $q : X_2 \to X_1$, переводящие отмеченные точки в отмеченные и такие, что $q \circ p \sim \mathrm{id}_{X_1}$, $p \circ q \sim \mathrm{id}_{X_2}$ (гомотопия — в классе отображений, сохраняющих отмеченные точки). Тогда из теоремы 2 следует, что p_* и q_* — два взаимно обратных гомоморфизма $\pi_1(X_1, b_1) \longleftrightarrow \pi_1(X_2, b_2)$. □

Следствие 2 (следствия 1). *Если X — линейное (или аффинное) пространство произвольной размерности, то $\pi_1(X)$ тривиальна.*

Доказательство. Пространство X гомотопически эквивалентно точке — началу координат. Отображение $p : \{0\} \to X$ — вложение, отображение $q : X \to \{0\}$ существует вообще только одно. Композиция $q \circ p = \mathrm{id}_{\{0\}}$, а гомотопия, соединяющая id_X с композицией $p \circ q$, выглядит так: $P(x,t) = (1-t)x$. □

Линейно связное пространство с тривиальной фундаментальной группой называется *односвязным.*

Действие группы G на топологическом пространстве X называется точным дискретным, если все преобразования $g : X \to X$, $g \in G$ непрерывны, и для каждой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность U, что множества gU при различных $g \in G$ не пересекаются.

Теорема 3. *Пусть топологическое пространство X односвязно и группа G действует на нем точно дискретно. Тогда $\pi_1(X/G) = G$.*

Напомним, что X/G обозначается фактор пространства X по действию группы G (элементами X/G являются орбиты действия G на X). Существует естественная проекция $p : X \to X/G$, сопоставляющая каждому элементу его орбиту. Топология на X/G определяется так: открытыми множествами считаются образы открытых множеств пространства X при отображении p.

Доказательство. Зафиксируем базисную точку $b \in X$; базисной точкой в X/G будем считать $p(b)$. Докажем сначала, что для любой петли $\gamma(t)$ в X/G с началом $p(b)$ существует и единственна кривая $\tilde{\gamma}(t)$ в X с началом b такая, что $\gamma(t) = p(\tilde{\gamma}(t))$ для всех $t \in [0,1]$. Для этого рассмотрим множество A всех $T \in [0,1]$ таких, что это утверждение верно для всех $t \in [0,T]$. Очевидно, $0 \in A$. Покажем, что A открыто. Пусть $T_0 \in A$. По условию теоремы существует окрестность $U \subset X$ точки $\tilde{\gamma}(T_0)$ такая, что любая орбита действия группы G пересекается с U не более чем в одной точке. Образ $p(U) \subset X/G$ открыт по определению топологии в X/G. Петля γ непрерывна, поэтому множество $V = \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in p(U)\}$ открыто. Для каждого $t \in V$ орбита $\gamma(t)$ пересекается с U по одному элементу; этот элемент и возьмем в качестве $\tilde{\gamma}(t)$. По условию, $T_0 \in V$; значит, некоторая окрестность T_0 тоже принадлежит V и, следовательно, A. Открытость A доказана. Аналогичным приемом доказывается замкнутость A (проделайте !). Следовательно, множество $A \subset [0,1]$ открыто, замкнуто и непусто — из этого вытекает, что $A = [0,1]$.

Заметим, что кривая $\tilde{\gamma}(t)$ не является, вообще говоря, петлей: $p(\tilde{\gamma}(1)) = p(b)$, из чего следует только, что $\exists g \in G : \tilde{\gamma}(1) = gb$. Тем самым каждой петле γ сопоставлен однозначно определенный (поскольку действие точно) элемент $g \in G$. Нетрудно показать, что гомотопным петлям соответствует один и тот же элемент. Действительно, при непрерывной деформации петли γ ее "поднятие" $\tilde{\gamma}$ также изменяется непрерывно. Но $\tilde{\gamma}(1)$ принадлежит дискретному множеству — орбите точки b — и, следовательно, остается неизменным. Тем самым построено отображение $\mu : \pi_1(X/G, p(b)) \to G$.

Это отображение — гомоморфизм. Действительно, поднятие петли $\gamma_1 \circ \gamma_2$ состоит из двух участков: первый есть $\widetilde{\gamma_1}$, а второй отличается от $\widetilde{\gamma_2}$ только тем, что начинается в $\mu(\gamma_1)b$. Очевидно, второй участок есть просто $\mu(\gamma_1)\widetilde{\gamma_2}$, и поэтому конечная точка есть $\mu(\gamma_1)\mu(\gamma_2)$.

Это отображение — эпиморфизм: в силу линейной связности X точки b и gb (для произвольного $g \in G$) можно соединить кривой φ. Проекция $p(\varphi)$ этой кривой есть петля, для которой $\mu(p(\varphi)) = g$.

Это отображение — мономорфизм. Действительно, пусть $\mu(\gamma) = e$. Иными словами, поднятие $\tilde{\gamma}$ есть петля в X. В силу односвязности X существует гомотопия Γ, соединяющая петлю $\tilde{\gamma}$ с тождественной. Тогда $p(\Gamma)$ — гомотопия, соединяющая γ с тождественной петлей в X/G. $\square$

Пример 2. Группа $G = \mathbb{Z}$ действует на одномерном линейном пространстве $X = \mathbb{R}$ сдвигами: $n(x) = x + n$. Очевидно, действие точно дискретно, а X односвязно в силу примера 1 и следствия 1. Фактор $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ гомеоморфен окружности S^1. Согласно теореме 3 $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Пример 3. На сфере S^n действует группа $\mathbb{Z}_2$: единственный отличный от единичного элемент этой группы переводит каждую точку сферы в диаметрально противоположную. Очевидно, действие точно дискретно, и $S^n/\mathbb{Z}_2$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^n$. Как мы докажем ниже, при $n \geq 2$ сфера S^n односвязна. Отсюда следует, что при $n \geq 2$ $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$.

Односвязность сферы доказывается так. Нам требуется построить гомотопию, соединяющую произвольную петлю γ на сфере с тождественной петлей. Если существует точка $a \in S^n$, через которую петля γ не проходит, то можно “стянуть” петлю γ в точку b с помощью стереографической проекции из точки a. Если петля γ проходит через все точки сферы S^n (что-то вроде кривой Пеано), то нам нужно построить гомотопию из γ в петлю, не обладающую этим свойством. Зафиксируем две диаметрально противоположные точки $a_1, a_2 \in S^n$. В силу равномерной непрерывности отображения $\gamma : [0,1] \to S^n$ можно разбить отрезок $[0,1]$ на конечное число подотрезков так, чтобы на каждом из них кривая проходила не более чем через одну точку a_i. На тех отрезках, где кривая не проходит через a_2, мы можем с помощью стереографической проекции из точки a_2 изменить γ так, чтобы она не проходила через a_1, а на концах отрезков оставалась неизменной (чтобы не нарушить непрерывность). На остальных отрезках менять γ не будем — она и так не проходит через точку a_1; таким образом, нам удалось эту точку “освободить”.