ЛЕКЦИЯ 8

Напомним, что линейный оператор A, заданный на n-мерном пространстве V со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, называется ортогональным, если $(Ax, Ay) \equiv (x, y)$. Для ортогонального оператора $\det A = \pm 1$. Ортогональные операторы образуют группу $\mathrm{O}(n)$ ($n = \dim V$), а операторы с $\det A = 1$ — ее подгруппу $\mathrm{SO}(n)$ индекса 2.

Лекция посвящена такой теореме:

Теорема. *Группа* $\mathrm{SO}(3)$ *гомеоморфна* $\mathbb{R}P^3$.

Мы дадим несколько доказательств.

Первое доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *У любого преобразования* $A \in \mathrm{SO}(3)$ *существует неподвижный вектор* v.

Доказательство. Рассмотрим *характеристический многочлен* преобразования A, заданный равенством $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Он третьей степени, поэтому имеет три комплексных корня, произведение которых по теореме Виета равно $\chi_A(0) = \det A = 1$. Если λ — вещественный корень χ_A, то оператор $A - \lambda E$ вырожден, т.е. существует вектор v такой, что $Av = \lambda v$. Но тогда $(Av, Av) = \lambda^2(v, v) = (v, v)$, откуда $\lambda = \pm 1$. Если все три корня χ_A вещественны (и, следовательно, равны ± 1), то по крайней мере один из них равен 1 (иначе произведение будет -1). Если же веществен только один корень λ, а два других — комплексно сопряженные α и $\overline{\alpha}$, то $\lambda\alpha\overline{\alpha} = \lambda\left|\alpha\right|^2 = 1$, откуда также $\lambda = 1$. Следовательно, вектор v неподвижный. □

Первое доказательство теоремы. Пусть v — неподвижный вектор преобразования A. Тогда преобразование A сохраняет плоскость L, ортогональную v, и ограничение $A|_L \in \mathrm{SO}(2)$, т.е., является поворотом. Таким образом, преобразованию A сопоставлены: вектор v, который можно считать элементом единичной сферы S^2, и угол поворота φ, изменяющийся от 0 до π. При этом все повороты на угол 0 совпадают (это тождественное преобразование), а поворот на угол π вокруг вектора v и на вокруг вектора $-v$ это одно и то же. Поэтому $\mathrm{SO}(3)$ устроено как трехмерный шар, у которого диаметрально противоположные точки границы отождествлены — а это $\mathbb{R}P^3$. □

Чтобы дать второе доказательство, напомним, что *телом кватернионов* $\mathbb{H}$ называется четырехмерное линейное пространство (над полем $\mathbb{R}$) с базисом $1, i, j, k$ и билинейным (над $\mathbb{R}$), ассоциативным, но некоммутативным умножением, заданным по правилу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Для кватерниона $u = x + iy + jz + kt$ число x называется его вещественной частью: $x = \mathrm{Re}\, u$. Кватернион $\overline{u} = x - iy - jz - kt$ называется сопряженным к u.

Лемма 2. *Сопряжение является антигомоморфизмом:* $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$ *и* $\overline{uv} = \overline{v}\,\overline{u}$. *Формула* $(u, v) = \mathrm{Re}(u\overline{v})$ *определяет на* $\mathbb{H}$ *скалярное произведение, по отношению к которому базис* $1, i, j, k$ *является ортонормированным.*

Доказательство. Равенства $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$ и $\overline{uv} = \overline{v}\,\overline{u}$ проверяются непосредственным вычислением. Линейность $(\cdot,\cdot)$ по первому аргументу теперь очевидна: $(u+w, v) = \mathrm{Re}((u+w)\overline{v}) = \mathrm{Re}(u\overline{v}+w\overline{v}) = \mathrm{Re}(u\overline{v})+\mathrm{Re}(w\overline{v}) = (u, v) + (w, v)$, и $(\lambda u, v) = \mathrm{Re}(\lambda u\overline{v}) = \lambda\,\mathrm{Re}(u\overline{v}) = \lambda(u, v)$, поскольку число λ вещественное.

Из равенства $\overline{u\overline{v}} = v\overline{u}$ следует, что $\mathrm{Re}(u\overline{v}) = \mathrm{Re}(v\overline{u})$ (действительные части сопряженных кватернионов равны), поэтому форма $(\cdot,\cdot)$ — симметрическая. Положительная определенность следует из того, что при $u = x + iy + jz + kt \neq 0$ $(u, u) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = |u|^2$ — действительное положительное число (квадрат модуля кватерниона). □

Кватернионы с единичным модулем образуют трехмерную сферу S^3.

Лемма 3. *Множество* G *кватернионов с единичным модулем является группой по умножению.*

Доказательство. Пусть кватернионы u и v имеют единичный модуль. Тогда (по лемме 2) $uv\overline{uv} = uv\overline{v}\,\overline{u} = u\overline{u} = 1$, т.е., G замкнуто относительно умножения. Относительно взятия обратного G тоже замкнуто, как следует из формулы $u^{-1} = \overline{u}/\left|u\right|$. □

Обозначим $\mathcal{I}$ множество кватернионов с нулевой вещественной частью: $x = -\overline{x}$. Каждому элементу $u \in G$ сопоставим линейное преобразование C_u, действующее так: $C_u x = ux\overline{u}$.

Лемма 4. *Все преобразования* C_u *отображают* $\mathcal{I}$ *в себя и принадлежат группе* $\mathrm{SO}(\mathcal{I}) = \mathrm{SO}(3)$. *Отображение* $u \mapsto C_u$ *является гомоморфизмом групп* $G \to \mathrm{SO}(3)$.

Доказательство. Для всякого $x \in \mathcal{I}$ имеем $\overline{C_u x} = u\overline{x}\,\overline{u} = -ux\overline{u} = -C_u x$, откуда $C_u x \in \mathcal{I}$. Прямым вычислением проверяется равенство $(u, v) = (\overline{u}, \overline{v})$ (т.е., сопряжение — ортогональный оператор). Теперь:

$$(C_u x, C_u y) = \mathrm{Re}(ux\overline{u}u\overline{y}\overline{u}) = \mathrm{Re}(ux\overline{y}\overline{u}) = (ux, uy) = (\overline{x}\overline{u}, \overline{y}\overline{u}) = \mathrm{Re}(\overline{x}\overline{u}uy) = (x, y).$$

Таким образом, $C_u \in \mathrm{O}(\mathcal{I})$. Для доказательства того, что $\det C_u = 1$ заметим, что множество единичных кватернионов G гомеоморфно трехмерной сфере и поэтому линейно связно. Отображение $u \mapsto \det C_u$ непрерывно и принимает только 2 значения — 1 и -1. Такое отображение обязательно должно быть постоянным, т.е. $\det C_u$ одинаков для всех $u \in G$. Но C_1 — единичное преобразование, поэтому $\det C_u \equiv 1$.

Равенство $C_{uv} = C_u C_v$ проверяется непосредственным вычислением. □

Лемма 5. *Образом гомоморфизма C является вся группа* $\mathrm{SO}(3)$.

Из леммы 5 немедленно получается

Второе доказательство теоремы. Из леммы 5 вытекает, что группа $\mathrm{SO}(3)$ является фактором группы G по ядру гомоморфизма C. Это ядро состоит из кватернионов u единичной длины, обладающих свойствами $ui\overline{u} = i \Leftrightarrow ui = iu$, и аналогично для j и k — то есть, из кватернионов единичной длины, коммутирующих со всеми чисто мнимыми кватернионами. Нетрудно убедиться, что таких кватернионов только два, 1 и -1. Тем самым $C_u = C_{-u}$, а все остальные преобразования вида C_v с C_u не совпадают. Поэтому отображение C склеивает противоположные точки трехмерной сферы G, и его образ гомеоморфен $\mathbb{R}P^3$. □

Доказательство леммы 5. Распространим определение преобразования C_u на все кватернионы $u \in \mathbb{H}$. Преобразование C_0 — нулевое, остальные C_u обратимы ($C_u^{-1} = C_{u^{-1}}$) и умножают скалярное произведение на $|u|^2$. Дифференциалом отображения $C : \mathbb{H} \setminus \{0\} \to \mathrm{GL}(\mathcal{I})$ в точке $u \in \mathbb{H}$ является линейный оператор $DC_u : \mathbb{H} \to \mathrm{Lin}(\mathbb{H}, \mathrm{Lin}(\mathcal{I}))$ (Lin — множество всех линейных операторов). Он сопоставляет кватерниону s оператор, действующий на чисто мнимый кватернион z по формуле $DC_u(s)(z) = sz\bar{u} + uz\bar{s}$. Докажем, что при всех $u \neq 0$ и всех $s \neq 0$ оператор $DC_u(s) \neq 0$. Действительно, $DC_u(s)(z) = DC_1(z\bar{u})$, поэтому достаточно доказать это утверждение для $u = 1$. Но если $DC_1(s)(z) = 0$ при всех $z \in \mathcal{I}$, то $sz + z\bar{s} \equiv 2sz \equiv 0$, откуда $s = 0$.

Рассмотрим теперь образ $C(G)$ гомоморфизма C. Если $C(G) \neq \mathrm{SO}(\mathcal{I})$, то существует точка границы $g \in \mathrm{SO}(\mathcal{I})$, в окрестности которой лежат как точки $C(G)$, так и точки, образу не принадлежащие. Поскольку G — компакт, то $C(G)$ тоже компакт и поэтому замкнуто. Следовательно, $g \in C(G)$, или $g = C_u$. Но поскольку, как мы доказали выше, дифференциал DC_u невырожден, по теореме о неявной функции g должна быть внутренней точкой $C(G)$ вопреки выбору. Полученное противоречие доказывает, что $C(G) = \mathrm{SO}(\mathcal{I})$. □

Дадим третье доказательство теоремы.

Лемма 6. *Группа* $\mathrm{SO}(3)$ *гомеоморфна множеству упорядоченных пар ортогональных друг другу единичных векторов в* $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Группа $\mathrm{SO}(3)$ действует точно, транзитивно и свободно на множестве правоориентированных базисов в $\mathbb{R}^3$. Поэтому она гомеоморфна множеству таких базисов (e_1, e_2, e_3), $e_i \in \mathbb{R}^3$. Но в таком базисе вектор e_3 однозначно восстанавливается по e_1, e_2. □

Следствие. *Группа* $\mathrm{SO}(3)$ *гомеоморфна множеству пар векторов $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$, где $|e_1| = 1$, $(e_1, e_2) = 0$, $e_2 \neq 0$, профакторизованному по такому отношению эквивалентности: пары (e_1, e_2) и (e_1', e_2') эквивалентны, если $e_1' = e_1$ и $e_2' = \lambda e_2$ для некоторого $\lambda > 0$.*

Доказательство. Для всякого вектора $e_2 \neq 0$ существует и единственно число $\lambda > 0$ такое, что вектор λe_2 имеет единичную длину. □

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — сфера единичного радиуса с центром в начале координат. Назовем кривые $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \Omega$ эквивалентными, если $\gamma_1(t) - \gamma_2(\lambda t) = o(t)$ при $t \to 0$ для некоторого $\lambda > 0$. Кривая $\gamma(t)$ называется гладкой в нуле, если вектор $\gamma'(0) \neq 0$.

Лемма 7. *Группа* $\mathrm{SO}(3)$ *гомеоморфна множеству классов эквивалентности кривых на сфере Ω, гладких в нуле.*

Доказательство. По формуле Тейлора класс эквивалентности кривой полностью определяется точкой $e_1 = \gamma(0) \in \Omega$ и вектором $e_2 = \gamma'(0)$, который не равен по условию нулю и известен с точностью до умножения на положительное число. Поскольку $\gamma(t) \in \Omega$, имеет место тождество $(\gamma(t), \gamma(t)) \equiv 1$. Дифференцируя это равенство по t при $t = 0$, получаем, что e_1 и e_2 перпендикулярны. Нужный результат теперь следует из леммы 6. □

Напомним, что комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфна S^2, т.е. Ω. Это позволяет дать еще одно описание пространства из леммы 7.

Лемма 8. *Множество классов эквивалентности кривых на* $\mathbb{C}P^1$ *гомеоморфно множеству пар* Λ, f, *где* $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ *— комплексная прямая (т.е. элемент* $\mathbb{C}P^1$*), а* $f : \Lambda \to \mathbb{C}$ *— ненулевая квадратичная форма, заданная с точностью до умножения на положительное вещественное число.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть кривые $\Lambda(t)$ такие, что $\Lambda(0) = \Lambda$. Для произвольной точки $e \in \Lambda$, $e \neq 0$ выберем в каждой прямой $\Lambda(t)$ точку $e(t)$ так, чтобы зависимость $e(t)$ была гладкой, и $e(0) = e$ (назовем $e(t)$ шевелением точки e). Положим по определению $f(e) = \nu(e, e'(0))$, где ν — невырожденная кососимметрическая билинейная форма на $\mathbb{C}^2$, заданная равенством $\nu((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Проверим сначала, что функция f определена корректно, т.е. не зависит от выбора шевеления. Действительно, другой выбор шевеления сводится к умножению $e(t)$ на зависящий от t комплексный множитель: $e(t) \mapsto \lambda(t)e(t)$, $\lambda(t) \in \mathbb{C}$, $\lambda(0) = 1$. При этом $\left.\frac{d\lambda(t)e(t)}{dt}\right|_{t=0} = e'(0) + \lambda'(0)e$. Поскольку $\nu(e, \lambda'(0)e) = 0$ в силу кососимметричности, корректность определения f доказана.

Проверим, что f — квадратичная форма. Действительно, для вектора $\lambda e \in \Lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$ рассмотрим шевеление $\lambda e(t)$. Тогда $f(\lambda e) = \nu(\lambda e, \lambda e'(0)) = \lambda^2 f(e)$, что и требовалось.

Обратно, пусть задана прямая $\Lambda \in \mathbb{C}P^1$ и форма f. Зафиксируем точку $e \in \Lambda$, $e \neq 0$. В силу невырожденности билинейной формы ν существует вектор $g \in \mathbb{C}^2$ такой, что $\nu(e, g) = f(e)$. При этом вектор $g(e)$ определен однозначно с точностью до прибавления кратных e. Это определяет семейство $e(t)$ такое, что $e'(0) = g$, также однозначно, с точностью до $o(t)$ при $t \to 0$ и с точностью до умножения на множитель $\lambda(t) \in \mathbb{C}$. Возьмем теперь в качестве $\Lambda(t)$ прямую, содержащую $e(t)$.

То, что форма f — ненулевая, означает, что $e'(0) \notin \Lambda$, что соответствует гладкости кривой $\Lambda(t)$ в нуле. $\square$

Следствие. *Множество классов эквивалентности кривых на* $\mathbb{C}P^1$ *гомеоморфно множеству пар* Λ, ℓ, *где* $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ *— комплексная прямая, а* $\ell \subset \Lambda$ *— вещественная прямая.*

Доказательство. В качестве прямой ℓ возьмем множество $\{z \in \Lambda \mid f(z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$. Очевидно, такое множество задает ненулевую квадратичную форму на комплексной прямой с точностью до умножения на вещественное положительное число. $\square$

Третье доказательство теоремы. Всякий элемент $\ell \in \mathbb{R}P^3$ есть прямая в пространстве $\mathbb{R}^4$, которое мы отождествим с $\mathbb{C}^2$. Таким образом, прямой ℓ можно однозначно сопоставить содержащую ее комплексную прямую $\Lambda(\ell)$. Поэтому $\mathbb{R}P^3$ гомеоморфно множеству пар Λ, ℓ, где $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ — комплексная прямая, а $\ell \subset \Lambda$ — вещественная прямая. По следствию из леммы 8 это пространство гомеоморфно $\mathrm{SO}(3)$. $\square$