ЛЕКЦИЯ 9

Плоскостью Лобачевского мы будем называть верхнюю полуплоскость $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Вещественная ось (не принадлежащая Π) называется *абсолютом*. *Прямыми* плоскости Лобачевского будем называть либо вертикальные лучи, начало которых лежит на абсолюте, либо полуокружности в Π с центром на абсолюте. Нетрудно видеть, что через любые две точки плоскости Лобачевского проходит единственная прямая; для каждой прямой L и каждой точки $a \notin L$ существует прямая $M \ni a$, не пересекающая L. В отличие от ситуации V постулата Евклида, прямая M не единственна.

Если две прямые на плоскости Лобачевского пересекаются на абсолюте, они называются параллельными. Если же они не имеют общих точек, в том числе и на абсолюте, то они называются *расходящимися*.

Плоскость Лобачевского допускает и другую модель.

Предложение 1. *Преобразование $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ взаимно однозначно переводит верхнюю полуплоскость в единичный круг $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. При этом прямые плоскости Лобачевского переходят в дуги окружностей, перпендикулярные окружности $\{|z| = 1\}$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 = \frac{z-i}{z+i} \cdot \overline{\frac{z-i}{z+i}} = \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} = \frac{|z|^2 + i(z-\overline{z}) + 1}{|z|^2 - i(z-\overline{z}) + 1} = \frac{|z|^2 - 2\operatorname{Im} z + 1}{|z|^2 + 2\operatorname{Im} z + 1} < 1,$$

то есть образ лежит в единичном круге. Обратное преобразование имеет вид $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$. Пусть $|z| < 1$. Тогда

$$\operatorname{Im} i\frac{1+z}{1-z} = \operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} = \operatorname{Re}\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} = \operatorname{Re}\frac{(1-|z|^2) + (z-\overline{z})}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0,$$

т.е. образ лежит в верхней полуплоскости. Последнее утверждение следует из того, что всякое дробно-линейное преобразование комплексной плоскости переводит окружности и прямые в окружности и прямые, сохраняя при этом углы между окружностями (прямыми) в точке пересечения (этот факт проверен на семинаре). □

При отождествлении единичного круга с верхней полуплоскостью точка 1 (принадлежащая граничной окружности — абсолюту) переходит в ∞. В дальнейшем мы будем работать с моделью в верхней полуплоскости, но считать, что абсолют дополнен точкой ∞, т.е. является проективной прямой.

Наша ближайшая цель — определить аффинную группу плоскости Лобачевского. Мы не можем, как в евклидовом случае, воспользоваться для этого векторами. Однако для "обычного" аффинного пространства L имеет место

Теорема 1. *Преобразование $B : L \to L$ аффинно, если оно непрерывно и переводит прямые в прямые.*

Доказательство. Заметим, что если 4 точки a, b, c, d лежат в одной плоскости, то они принадлежат двум пересекающимся прямым. Из этого немедленно следует, что преобразование B переводит также и плоскости в плоскости. Действительно, пара прямых переходит при преобразовании B в пару прямых, а точка пересечения — в точку пересечения. Поэтому образы точек a, b, c, d также лежат на паре пересекающихся прямых, т.е., в одной плоскости. Теперь видно, что преобразование B переводит параллельные прямые в параллельные: действительно, образы параллельных прямых ℓ_1 и ℓ_2 — прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Пусть теперь точки a, b, c, d не лежат на одной прямой и $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$. Это эквивалентно тому, что прямая ab параллельна прямой cd, а прямая ac — прямой bd. Поскольку параллельные прямые переводятся преобразованием B в параллельные, то равные векторы переходят в равные. □

Будем считать теперь, по определению, что аффинная группа плоскости Лобачевского $\mathrm{Aff}_L(2)$ состоит из всех непрерывных обратимых преобразований $\Pi \to \Pi$, переводящих прямые в прямые. Эта группа достаточно богата:

Предложение 2. $\mathrm{Aff}_L(2)$ *содержит все преобразования вида* $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, *где* a, b, c, d *— действительные числа, удовлетворяющие неравенству* $ad - bc > 0$, *и все преобразования вида* $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, *где* a, b, c, d *— действительные числа, удовлетворяющие неравенству* $ad - bc < 0$.

Доказательство. Дробно-линейные преобразования комплексной плоскости (с произвольными комплексными a, b, c, d) и их композиции с комплексным сопряжением переводят окружности в окружности и сохраняют углы. Поскольку $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, вещественная ось переходит в себя. Поэтому описанные преобразования переводят верхнюю полуплоскость Π либо в себя (и, тем самым, принадлежат $\mathrm{Aff}_L(2)$), либо в нижнюю полуплоскость. Точка $i \in \Pi$ переходит в $\frac{bd+ac}{c^2+d^2} \pm i\frac{ad-bc}{c^2+d^2}$, где знак $+$ соответствует преобразованию без сопряжения (преобразованиям I рода) , а знак $-$ — с сопряжением (преобразованиям II рода). Отсюда получаются неравенства $ad - bc <> 0$. □

Следствие 1. *Для любых трех различных точек абсолюта существует аффинное преобразование плоскости Лобачевского, переводящее эти точки в* 0, 1 *и* ∞.

Доказательство. Ограничение описанных выше преобразований на абсолют состоит из всех дробно-линейные преобразований прямой, т.е. составляет группу $\mathrm{PGL}(1, \mathbb{R})$. Эта группа действует транзитивно на тройках попарно различных точек. □

Наша задача — доказать, что никаких других преобразований в группе $\mathrm{Aff}_L(2)$ нет.

Лемма 1. *Аффинное преобразование плоскости Лобачевского переводит параллельные прямые в параллельные. Оно непрерывно продолжается на абсолют и однозначно определяется своим ограничением на абсолют.*

Доказательство. Пусть $\Phi \in \mathrm{Aff}_L(2)$, и ℓ_1, ℓ_2 — параллельные прямые. Тогда прямые $\Phi(\ell_1), \Phi(\ell_2)$ не имеют общих точек, т.е. либо параллельны, либо расходятся. Обозначим $M(\ell_1, \ell_2)$ множество прямых, пересекающих ℓ_1, но не пересекающих ℓ_2. Отображение Φ гомеоморфно отображает множество $M(\ell_1, \ell_2)$

в множество $M(\Phi(\ell_1), \Phi(\ell_2))$. Но для параллельных прямых ℓ_1, ℓ_2 множество $M(\ell_1, \ell_2)$ имеет одну компоненту линейной связности, а для расходящихся — две. Поэтому прямые $\Phi(\ell_1), \Phi(\ell_2)$ параллельны.

Продолжение преобразования Φ на абсолют осуществляется так. Пусть a — точка абсолюта. Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через a, и выберем в качестве $\Phi(a)$ точку пересечения прямой $\Phi(\ell)$ с абсолютом (чтобы понять, какую из двух, ℓ нужно ориентировать). Поскольку Φ переводит параллельные прямые в параллельные, результат не зависит от выбора прямой $\ell \ni a$.

Последнее утверждение леммы следует из того, что всякая точка плоскости Лобачевского может быть представлена как пересечение прямых, а прямая полностью определяется своим пересечением с абсолютом. □

Лемма 2. *Если преобразование $\Phi \in \mathrm{Aff}_L(2)$ оставляет три различные точки абсолюта на месте, то оно является тождественным.*

Доказательство. Следствие 1 позволяет считать, что Φ оставляет на месте точки 0, 1 и ∞. Обозначим φ ограничение Φ на абсолют; по лемме 1 нам достаточно доказать, что $\varphi(t) \equiv t$.

Рассмотрим точку $m \in \Pi$ с координатами (x, y). Проведем прямые $(m0)$, $(m1)$ и $(m\infty)$. Первая из них это полуокружность, пересекающая абсолют в точках 0 и $\frac{x^2+y^2}{x}$. Вторая — полуокружность с концами 1 и $\frac{x(x-1)+y^2}{x-1}$. Третья — вертикальный луч с абсциссой x. Преобразование Φ переводит $(m0)$ в полуокружность с концами 0 и $\varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$, $(m1)$ — в полуокружность с концами 1 и $\varphi\left(\frac{x(x-1)+y^2}{x-1}\right)$, а $(m\infty)$ — в вертикальный луч с абсциссой $\varphi(x)$ (поскольку ∞ остается на месте). Условие того, что образы этих трех прямых пересекаются в одной точке — образе m — дает на φ следующее функциональное уравнение: для любых x, y $(y > 0, x \neq 0, 1)$

$$\varphi(x) = \frac{\varphi\left(\frac{x(x-1)+y^2}{x-1}\right)}{\varphi\left(\frac{x(x-1)+y^2}{x-1}\right) + 1 - \varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)}.$$

Обозначим $a = \frac{x^2+y^2}{x}$, тогда $\frac{x(x-1)+y^2}{x-1} = \frac{x}{x-1}(a-1)$, и уравнение в переменных x, a принимает вид

$$\varphi\left(\frac{x}{x-1}(a-1)\right) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)-1}(\varphi(a)-1).$$

Полагая $x = 1/2$, получим, что $\varphi(1-a) = \lambda(1-\varphi(a))$, где $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi(1/2)}{1-\varphi(1/2)}$. Отсюда $\varphi(a) = \lambda(1-\varphi(1-a)) = \lambda(1-\lambda(1-\varphi(a)))$, и $\lambda = 1$. Исходное уравнение теперь принимает вид $\varphi\left(\frac{x}{1-x}b\right) = \frac{\varphi(x)}{1-\varphi(x)}\varphi(b)$, где $b = 1-a$. Полагая $b = 1$, и учитывая, что $\varphi(1) = 1$, получим $\varphi\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$, и, следовательно, $\varphi\left(\frac{x}{1-x}b\right) = \varphi\left(\frac{x}{1-x}\right)\varphi(b)$. Следовательно, функция φ удовлетворяет равенству $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$, из чего следует, что она является степенной: $\varphi(t) = t^n$. Но из всех степенных функций только $\varphi(t) = t$ удовлетворяет равенству $\varphi\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$. □

Теорема 2. $\mathrm{Aff}_L(2)$ *изоморфна группе* $\mathrm{PGL}(1,\mathbb{R})$ *дробно-линейных преобразований с вещественными коэффициентами (изоморфизм осуществляется путем ограничения аффинного преобразования на абсолют).*

Доказательство. Пусть $\Phi \in \mathrm{Aff}_L(2)$, и φ — его ограничение на абсолют. Рассмотрим преобразование $f \in \mathrm{PGL}(1,\mathbb{R})$, переводящее $\varphi(0)$ в 0, $\varphi(1)$ в 1, и $\varphi(\infty)$ в ∞, и продолжим f до аффинного преобразования F плоскости Лобачевского, как в предложении 2. Тогда преобразование $F \circ \Phi \in \mathrm{Aff}_L(2)$ оставляет на месте 0, 1 и ∞, и, следовательно, является тождественным. □

Напомним, что флагом на плоскости (Лобачевского или евклидовой, неважно) называется тройка (a, p, S), где $a \in \Pi$ — точка, p — луч с началом a, S — полуплоскость, на границе которой лежит луч p.

Теорема 3. *Группа* $\mathrm{Aff}_L(2)$ *действует точно и транзитивно на множестве флагов в* Π. *Иными словами, для любых двух флагов* $(a_1, p_1, S_1), (a_2, p_2, S_2)$ *существует ровно одно аффинное преобразование, переводящее один в другой.*

Доказательство. Обозначим ℓ_1, ℓ_2 прямые, содержащие лучи p_1, p_2. Построим сначала преобразование, переводящее ℓ_1 в ℓ_2. Для этого нужно перевести две точки пересечения абсолюта с ℓ_1 в две точки пересечения абсолюта с ℓ_2, а это возможно по следствию 1. Теперь нам нужно, сохраняя прямую на месте, перевести одну ее точку в другую. Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемая прямая ℓ — положительная мнимая полуось. Тогда нетрудно видеть, что в качестве требуемого преобразования можно выбрать просто умножение на вещественное положительное число.

Теперь без ограничения общности можно еще считать, что $a = i$. Преобразование $z \mapsto 1/\overline{z}$ переводит ℓ в себя и меняет местами два луча с началом в точке a. Преобразование $z \mapsto -\overline{z}$ сохраняет ℓ поточечно (в частности, срохраняет точку a и лучи с началом в ней) и меняет местами две полуплоскости, ограниченные прямой ℓ.

Для доказательства единственности достаточно рассмотреть ситуацию, когда $a_1 = a_2 = i$, $p_1 = p_2$ — вертикальный луч с началом в i, и $S_1 = S_2$ — правая полуплоскость (множество чисел с положительной вещественной и мнимой частью). Тогда ограничение аффинного преобразования на абсолют сохраняет точки 0 и ∞, и поэтому имеет вид $f(t) = ct$, $c \in \mathbb{R}$. Значит, либо $\Phi(z) = cz$, $c > 0$, либо $\Phi(z) = c\overline{z}$, $c < 0$. Но из всех таких преобразований точку i и правую полуплоскость сохраняет только тождественное преобразование. □

Заметим, что в евклидовом случае соответствующее множество аффинных преобразований бесконечно — аффинная группа плоскости Лобачевского *меньше*, чем соответствующая группа евклидовой плоскости.