СЕМИНАР 1

Действием группы G на множестве M называется гомоморфизм S группы G в группу взаимно однозначных отображений M в себя. Элементы множества M будем называть точками, и вместо $S(g)(a)$, где $a \in M, g \in G$ будем писать просто $g(a)$.

Задача 1. Назовем точки a и b эквивалентными, если $\exists g \in G : b = g(a)$. Докажите, что это — отношение эквивалентности.

Классы эквивалентности по этому отношению называются *орбитами* действия. Действие называется *транзитивным*, если оно имеет только одну орбиту.

Задача 2. Опишите орбиты действия группы самосовмещений правильного шестиугольника **а)** на диагоналях шестиугольника, **б)** на треугольниках с вершинами в вершинах шестиугольника.

Задача 3. Опишите орбиты действия группы $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных преобразований линейного пространства V а) на пространстве V б) на множестве пар векторов из V в) на множестве троек векторов из V.

Стабилизатором точки a называется множество $\mathrm{Stab}_a = \{g \in G \mid g(a) = a\}$. Стабилизатором подмножества $M' \subset M$ называется пересечение стабилизаторов его элементов. Нормализатором подмножества $M' \subset M$ называется множество элементов G, биективно отображающих M' в себя.

Задача 4. Докажите, что стабилизатор и нормализатор любого подмногжества являются подгруппами. Всегда ли является подгруппой множество отображений, переводящих элементы M' в M'?

Задача 5. Докажите, что если точки a и b принадлежат одной орбите, то подгруппы Stab_a и Stab_b сопряжены. Докажите, что при транзитивном действии группы существует взаимно однозначное соответствие между точками и смежными классами G/Stab_a.

Задача 6. Опишите стабилизаторы точек (одноэлементных подмножеств) в задаче 2.

Задача 7. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в n-мерном пространстве. Как выглядят в этом базисе матрицы линейных преобразований, принадлежащих стабилизаторам

1. Вектора e_1;
2. Векторов $e_1, \dots, e_k$;
3. Линейного подпространства, натянутого на вектор e_1;
4. Линейного подпространства, натянутого на векторы $e_1, \dots, e_k$;
5. Линейного подпространства, натянутого на векторы $e_1, \dots, e_k$ и линейного подпространства, натянутого на векторы $e_{k+1}, \dots, e_n$;
6. Флага подпространств $\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \dots \subset \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$?

Действие группы называется *свободным*, если стабилизаторы всех точек тривиальны $\Leftrightarrow$ все преобразования $g : M \to M$, кроме тождественного, не имеют неподвижных точек.

Задача 8. Пусть группа G действует транзитивно на множестве M. Докажите, что стабилизатор $\mathrm{Stab}_a \subset G$ нормален тогда и только тогда, когда $\mathrm{Stab}_a = \mathrm{Stab}_M$, и что в этом случае фактор-группа G/Stab_M действует свободно на множестве M.

Задача 9. Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ — базисы линейного пространства V. Докажите, что существует непрерывная деформация базисов $e_1(t), \dots, e_n(t)$ такая, что $e_i(0) = e_i$, $e_1(1) = \pm f_1$, и подпространство, порожденное $e_2(1), \dots, e_n(1)$, совпадает с подпространством, порожденным $f_2, \dots, f_n$.

Задача 10. Докажите, используя результат задачи 9, что группа $\mathrm{GL}_+(n)$, состоящая из матриц $n \times n$ с положительным определителем, линейно связна. Как описать компоненты линейной связности группы $\mathrm{GL}(n)$?

Задача 11. Пусть $a_1, \dots, a_m \in V$, где V — n-мерное линейное пространство, и $m \geq n+2$. Докажите, что существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$.

Задача 12. [теорема Радона] Пусть $a_1, \dots, a_m \in V$, где V — n-мерное линейное пространство, и $m \geq n+2$. Докажите, что точки $a_1, \dots, a_m$ можно разбить на две группы, выпуклые оболочки которых пересекаются.

Задача 13. [теорема Хелли] Пусть $M_1, \dots, M_m \subset V$ — выпуклые множества, $m \geq n+2$. Известно, что пересечение любых $n+1$ множества M_i непусто. Докажите, что пересечение всех множеств M_i непусто.

Задача 14. Пусть $T_1, \ldots, T_m$ — параллельные отрезки на плоскости, $m \geq 3$. Известно, что для любых трех отрезков существует пересекающая их прямая. Докажите, что существует прямая, пересекающая все отрезки.