СЕМИНАР 2

Пусть H — гиперплоскость в $\mathbb{R}^4$, заданная уравнением $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Задача 1. Докажите, что векторы $f_1 = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$, $f_2 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$, $f_3 = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ образуют базис в H, где $\{e_i\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^4$. Докажите, что $\{f_1/2, f_2/2, f_3/2\}$ — ортонормированный базис.

Пусть I — четырехмерный куб, т.е. подмножество $\mathbb{R}^4$, заданное условиями $-1 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 1$. Пусть $M = I \cap H$ — его главное сечение.

Задача 2. Докажите, что M — выпуклое множество. Докажите, что в координатах $\{y_1, y_2, y_3\}$, связанных с базисом $\{f_1, f_2, f_3\}$, множество M задается восемью условиями $\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \le 1$.

Задача 3. Нарисуйте множество M. Найдите его вершины, ребра, грани. Докажите, что M — многогранник. Как он называется?

Пусть G_M — группа линейных преобразований пространства H, переводящих M в себя. G_M называется *группой самосовмещений* M.

Задача 4. Докажите, что элементы G_M переводят вершины в вершины, ребра в ребра, а двумерные грани — в двумерные грани.

Пусть $G_{I\cup H}$ — группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^4$, переводящих I и H в себя.

Задача 5. Убедитесь, что $G_{I\cup H}$ переводит M в себя. Докажите, что естественное отображение $G_{I\cup H}$ в G_M — гомоморфизм групп.

Задача 6. Докажите, что любые перестановки координат $\{e_i\}$ и центральная симметрия принадлежат $G_{I\cup H}$. Как они действуют на M (в координатах $\{y_i\}$)? Есть ли другие элементы $G_{I\cup H}$?

Задача 7. Докажите, что $G_{I\cup H}$ действует транзитивно на множестве вершин M. Докажите, что стабилизатор любой вершины действует транзитивно на множестве ребер, входящих в эту вершину.

Последовательность $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k$ вложенных друг в друга граней выпуклого множества называется *флагом.* Если k совпадает с размерностью пространства, то флаг называется *полным*

Задача 8. Докажите, что стабилизатор флага $V \subset E$, где E — ребро, а V — один из его концов (вершина), действует транзитивно на множестве двумерных граней F, примыкающих к ребру E. Докажите, что группа $G_{I\cup H}$ действует транзитивно на множестве полных флагов M.

Задача 9. Докажите, что G_M действует транзитивно на множестве полных флагов M. Докажите, что стабилизатор любого полного флага тривиален.

Многогранник, группа самосовмещений которого действует транзитивно на множестве полных флагов называется *правильным.*

Задача 10. Приведите пример неправильного многогранника (любой размерности), группа самосовмещений которого действует транзитивно на множестве вершин.

Задача 11. Выведите из задач 8 и 9, что любое преобразование из G_M продолжается до преобразования из $G_{I\cup H}$ (т.е. гомоморфизм $G_{I\cup H}$ в G_M— сюръективен). Докажите, что $G_M = S_4 \times \mathbb{Z}_2$, $G_{I\cup H} = S_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Преобразования, сохраняющие ориентацию пространства (чьи матрицы имеют положительный определитель) называются *собственными.*

Задача 12. Докажите, что подгруппа собственных преобразований в G_M изоморфна S_4. Как действуют ее образующие? Найдите в ней стабилизаторы вершин, ребер, граней, всевозможных флагов.

Задача 13. Вычислите группы самосовмещений 1) правильного n-угольника на плоскости 2) правильного тетраэдра 3) правильного n-мерного симплекса.

Задача 14. Вычислите группу самосовмещений трехмерного куба. Объясните, почему она совпадает с группой самосовмещений правильного октаэдра.

Задача 15. Докажите, что у правильного додекаэдра и икосаэдра одинаковая группа самосовмещений G. Докажите, что $G = G' \times \mathbb{Z}_2$, где G' — подгруппа собственных преобразований. Сколько элементов в G?

Указание. Используйте транзитивность действия на флагах.

Задача 16. Вычислите G' из предыдущей задачи.

Указание. Рассмотрите действие группы G' на множестве из пяти кубов, вписанных в додекаэдр.