СЕМИНАР 3(4)

В следующих задачах рассматривается пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum x_i y_i$.

Задача 1. Докажите, что ортогональные проекции вершин n–мерного куба $\{\mathbf{x}| - 1 \le x_i \le 1\}$ на его главную диагональ делят ее на n равных частей. Сколько вершин спроектируется в каждую из точек?

Задача 2. Докажите, что вокруг n–мерного симплекса можно описать n–мерную сферу. Докажите, что такая сфера единственна.

В следующих задачах рассматривается пространство Mat_n вещественных матриц $n \times n$ со скалярным произведением $(A, B) = \mathrm{tr}\,(A \cdot B^t)$, где след матрицы $\mathrm{tr}A$ есть сумма ее диагональных элементов.

Задача 3. Выразите скалярное произведение через матричные элементы. Найдите ортогональные дополнения к следующим подпространствам:

1. матриц с нулевым следом
2. верхнетреугольных матриц
3. симметрических матриц ($A^t = A$)
4. кососимметрических матриц ($A^t = -A$)

Задача 4. Докажите, что умножение справа/слева на ортогональную матрицу является ортогональным преобразованием этого пространства. Есть ли другие ортогональные преобразования?

В следующих задачах рассматривается пространство непрерывных функций на $[-1, 1]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

Задача 5. Докажите, что функции $sin(\pi n x)$, $cos(\pi n x)$, $n = 1, 2, \ldots$ ортогональны. Выведите из этого, что они линейно независимы. Чему равны длины этих векторов?

Задача 6. Докажите, что многочлены Лежандра $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[(1 - x^2)^n\right]$ образуют ортогональный базис в подпространстве многочленов. Будет ли этот базис ортонормированным?

Указание. Проинтегрируйте по частям нужное число раз.

Задача 7. Докажите, что многочлены Лежандра получаются ортогонализацией Грама-Шмидта из базиса $\{1, x, x^2, \ldots\}$.

Задача 8. Найдите минимум $\int_{-1}^{1} P(x)^2 dx$ по всем многочленам P степени n со старшим коэффициентом 1.

Указание. Сформулируйте эту задачу, как задачу об аффинном подпространстве и решите ее в этой общности.

В следующих задачах рассматривается пространство $\mathbb{R}^2$ с билинейной формой $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$. Напомним, что $\mathrm{sh}t = (e^t - e^{-t})/2$, $\mathrm{ch}t = (e^t + e^{-t})/2$.

Задача 9. Докажите, что линейное преобразование $A_t = \begin{pmatrix} \mathrm{ch} t & \mathrm{sh} t \\ \mathrm{sh} t & \mathrm{ch} t \end{pmatrix}$ сохраняет эту форму. Какую кривую описывает точка $A_t p$, если t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$? (p — произвольная фиксированная точка плоскости).

Задача 10. Докажите, что любое преобразование, сохраняющее эту форму, переводит множество, состоящее из пары прямых $x_1 = x_2$ и $x_1 = -x_2$ в себя. Верно ли обратное?

Задача 11. Найдите все преобразования, сохраняющие эту форму.

Вернемся к ортогональной группе.

Задача 12. Докажите, что $SO(2) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$, где U — группа комплексных чисел с модулем 1 по умножению.

Задача 13. Найдите в $O(n)$ нормализаторы следующих множеств:

1. подпространства $V \in \mathbb{R}^n$
2. полного флага $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1}$, $\dim V_i = i$
3. неполного флага $V_{i_1} \subset \cdots \subset V_{i_s}$, $\dim V_{i_r} = i_r$, $0 < i_1 < \cdots < i_s < n$.

Задача 14. Докажите, что действие $O(n)$ на полных флагах транзитивно.

Задача 15. Докажите, используя предыдущую задачу или алгоритм Грама–Шмидта, что любая матрица представляется в виде произведения верхнетреугольной и ортогональной матрицы.