СЕМИНАР 4(5)

.

Будем называть *дробно–линейным преобразованием* преобразование аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ вида $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$.

Утверждения задач 1–10 выполнены и для вещественного и для комплексного случая (для любого поля характеристики ноль). Для простоты можно решать эти задачи в вещественном случае.

Задача 1. Докажите, что композиция дробно–линейных преобразований — дробно–линейное преобразование. Найдите композицию преобразований $\frac{ax+b}{cx+d}$ и $\frac{a'x+b'}{c'x+d'}$.

Матрицей дробно–линейного преобразования $\frac{ax+b}{cx+d}$ назовем матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Задача 2. Докажите, что при взятии композиции матрицы дробно–линейных преобразований перемножаются. Выведите отсюда, что преобразования $\frac{ax+b}{cx+d}$, для которых $ac-bd \neq 0$ образуют группу. Как устроены преобразования у которых $ac-bd=0$?

В дальнейшем будем предполагать $ad-bc \neq 0$.

Задача 3. Положим $\frac{ax+b}{cx+d}(-\frac{d}{c}) = \infty$, $\frac{ax+b}{cx+d}(\infty) = \frac{a}{c}$. Докажите, что дробно–линейные преобразования являются взаимно–однозначными преобразованиями проективной прямой $\mathbb{A}^1 \cup \infty$

Задача 4. Докажите, что любое дробно–линейное преобразование либо является аффинным преобразованием $ax+b$, либо представляется композицией инверсии $1/x$ и двух аффинных преобразований. Какое утверждение про матрицы получается из этого?

Задача 5. Постройте дробно–линейное преобразование, переводящее три данные различные точки x_1, x_2, x_3 в 0, 1, ∞.

Задача 6. Докажите, что существует единственное дробно–линейное преобразование, переводящее три данные различные точки x_1, x_2, x_3 в три данные различные точки y_1, y_2, y_3.

Задача 7. Докажите, что дробно–линейные преобразования сохраняют двойное отношение четырех точек $[a,b,c,d] = \frac{d-a}{d-c}/\frac{b-a}{b-c}$.

Указание. Прямой проверки можно избежать, воспользовавшись задачами 5 и 6.

Задача 8. Докажите, что любое преобразование прямой, сохраняющее двойное отношение — дробно–линейное.

Указание. Образ трех точек в этом случае полностью определяет преобразование.

Задача 9. Какие значения может принимать двойное отношение?

Задача 10. Как перестановки четырех точек действуют на их двойное отношение? Какие перестановки его сохраняют?

Теперь рассмотрим дробно–линейные преобразования $\mathbb{C}$.

Задача 11. Докажите, что 4 точки $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\frac{(d-a)(b-c)}{(d-c)(b-a)}$ вещественно.

Указание. Аргумент числа $\frac{z-a}{z-b}$ равен $\angle azb$.

Задача 12. Докажите, что дробно–линейные преобразования переводит окружности и прямые в окружности и прямые.

Задача 13. Докажите, что дробно–линейное преобразование $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ переводит единичный круг в верхнюю полуплоскость.

Задача 14. При каких условиях на коэффициенты a, b, c, d дробно–линейное преобразование переводит верхнюю полуплоскость в себя?

Задача 15. Докажите, что дробно–линейные преобразования сохраняют углы между кривыми.

Преобразования, сохраняющие углы называют *конформными*.