СЕМИНАР 5(6)

Задача 1. Какое проективное преобразование проективной плоскости с однородными координатами $x : y : z$ задает в аффинной карте $z = 1$

1. линейное преобразование с матрицей A;
2. сдвиг на вектор v?

Задача 2. Докажите, что нельзя построить середину данного отрезка, пользуясь только линейкой без делений.

Указание. Постройте проективное преобразование, сохраняющее отрезок, но не сохраняющее его середину.

В следующих двух задачах имеется в виду проективная плоскость и проективные прямые.

Задача 3. Докажите *теорему Дезарга*: прямые aa', bb' и cc' пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых $ab \cap a'b'$, $ac \cap a'c'$ и $bc \cap b'c'$ лежат на одной прямой.

Указание. Переведите проективным преобразованием точки $aa' \cap bb' \cap cc'$ и $ab \cap a'b'$ на бесконечно удаленную прямую.

Задача 4. Докажите *теорему Паппа*: если точки a_1, b_1, c_1 лежат на одной прямой, а точки a_2, b_2, c_2 — также на одной прямой, то точки $a_1b_2 \cap a_2b_1$, $a_1c_2 \cap a_2c_1$, $b_1c_2 \cap b_2c_1$ также лежат на одной прямой.

Задача 5. Сформулируйте проективно двойственные утверждения к этим теоремам.

Задача 6. Постройте проективное преобразование плоскости, переводящее

1. окружность $x^2 + y^2 = 1$ в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$;
2. окружность $x^2 + y^2 = 1$ в параболу $x^2 - y = 0$.

Куда перейдут при этом бесконечно удаленные точки? Какие точки станут бесконечно удаленными?

Задача 7. Постройте проективное преобразование плоскости, сохраняющее окружность $x^2 + y^2 = 1$, но не сохраняющее ее центр. Выведите отсюда, что центр окружности нельзя построить, пользуясь только линейкой без делений. Существует ли проективное преобразование, переводящее окружность в себя, а центр — вовне окружности?

Задача 8. Докажите *теорему Паскаля*: пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — шестиугольник, вписанный в окружность. Докажите, что точки $A_1A_2 \cap A_4A_5$, $A_2A_3 \cap A_5A_6$, $A_3A_4 \cap A_6A_1$ лежат на одной прямой. Можно ли заменить окружность эллипсом? гиперболой?

Указание. Постройте преобразование, переводящее окружность в себя, а прямую, ее не пересекающую, — в бесконечно удаленную.

Задача 9. Докажите, что кривая, двойственная окружности есть окружность. Сформулируйте утверждение, двойственное теореме Паскаля (*теорему Брианшона*).

Указание. Запишите уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = 1$ в точке $(\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Задача 10. Напишите уравнения кривых, проективно двойственных к параболе $x^2 - y = 0$, гиперболе $x^2 - y^2 = 1$, полукубической параболе $x^2 - y^3 = 0$.

Указание. Случаи параболы и гиперболы сводятся к случаю окружности. Полукубическую параболу параметризуйте.

Задача 11. Как устроена двойственная кривая в окрестности точки перегиба исходной кривой? в окрестности точки самопересечения? точки самокасания?

Задача 12. Докажите теорему Коутса: пусть прямая, вращающаяся вокруг начала координат, пересекает кривую степени n в n точках $x_1, \ldots, x_n$. Тогда среднее гармоническое точек $x_1, \ldots, x_n$ движется по некоторой прямой (считается, что начало координат не лежит на кривой).