СЕМИНАР 6(7)

Задача 1. Докажите, что $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ при $n > 1$.

Указание. Определите действие $\mathbb{Z}_2$ на сфере S^n, такое что $\mathbb{R}P^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2$. Воспользуйтесь односвязностью сферы.

Пусть T^2 — фактор плоскости $\mathbb{R}^2$ по следующему отношению эквивалентности: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ если $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ — целые.

Задача 2. Докажите, что $T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Выведите отсюда, что $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$.

Задача 3. Докажите, что T^2 гомеоморфно декартовому произведению двух окружностей. Вычислите эйлерову характеристику T^2 и докажите, что T^2 является сферой с одной ручкой.

Для целых m, n назовем (m, n)-обмоткой отображение $\varphi_{m,n} : [0, 1] \to T^2$, такое что $\varphi_{m,n}(t) = (mt, nt) \bmod \mathbb{Z}^2$.

Задача 4. Докажите, что любая петля с отмеченной точкой $(0, 0)$ гомотопна некоторой обмотке тора. Чему гомотопно произведение (m, n)- и (m', n')- обмоток?

Указание. Нарисуйте "развертку" петли на плоскости.

Задача 5. Докажите, что разные обмотки не гомотопны между собой.

Задача 6. Докажите, что $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ гомеоморфно произведению n окружностей. Вычислите $\pi_1(T^n)$ и постройте петли, представляющие элементы этой группы.

Задача 7. Пусть X_1, X_2 — топологические пространства с отмеченными точками p_1, p_2, $X_1 \times X_2$ — их декартово произведение с отмеченной точкой $p_1 \times p_2$. Докажите, что $\pi_1(X_1 \times X_2) = \pi_1(X_1) \oplus \pi_1(X_2)$.

Указание. Воспользуйтесь вложениями $i_{1,2} : X_{1,2} \to X_1 \times X_2$ и проекциями $p_{1,2} : X_1 \times X_2 \to X_{1,2}$ для построения гомоморфизмов групп.

Определим *свободную группу от n образующих* F_n. Рассмотрим символы $a_1, \ldots, a_n$, $a_1^{-1}, \ldots, a_n$. Как множество F_n есть множество конечных "слов" (включая пустое) из этих символов с точностью до эквивалентности $Aa_ia_i^{-1}B \sim AB \sim Aa_i^{-1}a_iB$. Умножение производится приписыванием одного слова к другому $A \cdot B = AB$.

Можно рассматривать F_n как множество слов без подслов $a_ia_i^{-1}$ и $a_i^{-1}a_i$.

Задача 8. Докажите, что F_n — группа. Определите умножение на множестве слов без указанных подслов.

Рассмотрим граф Γ_n, вершинами которого будут элементы F_n, а ребра соединяют вершины A и Aa_i.

Задача 9. Докажите, что Γ_n — дерево. Сколько ребер выходит из каждой вершины?

Задача 10. Докажите, что любое дерево, рассматриваемое как топологическое пространство с естественной топологией, односвязно.

Указание. Докажите это утверждение для конечного дерева и воспользуйтесь компактностью отрезка.

Рассмотрим действие F_n на вершинах Γ_n умножением слева.

Задача 11. Докажите, что F_n действует на ребрах Γ_n, то есть элементы F_n переводят вершины, соединенные ребром, в вершины, соединенные ребром. Опишите орбиты действия F_n на ребрах.

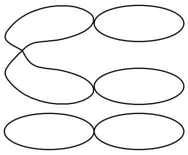
Назовем *букетом окружностей* $\vee^n S^1$ объединение n окружностей с одной отождествленной точкой.

Задача 12. Докажите, что фактор Γ_n как топологического пространства по F_n есть $\vee^n S^1$. Докажите, что $\pi_1(\vee^n S^1) = F_n$.

Задача 13. Докажите, что любой связный граф с конечным числом вершин, рассматриваемый как топологическое пространство, гомотопически эквивалентен букету окружностей.

Указание. Докажите, что стягивание ребра, соединяющего различные вершины, — гомотопическая эквивалентность.

Задача 14.



Докажите, что нарисованное отображение $\vee^3 S^1 \to \vee^2 S^1$ индуцирует вложение фундаментальных групп. Опишите это вложение $F_3 \subset F_2$.

(праобраз каждой точки $\vee^2 S^1$ состоит ровно из двух точек)

Задача 15. Пусть X — топологическое пространство. Докажите, что множество гомотопических классов отображений $S^1 \to X$ без отмеченной точки есть множество классов сопряженности $\pi_1(X)$.