СЕМИНАР 7(8)

Пусть $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов ($q = p^n$, где p — простое).

Задача 1. Сколько векторов содержит N–мерное пространство $\mathbb{F}_q^N$?

Задача 2. Сколько существует в $\mathbb{F}_q^N$ пар линейно независимых венкторов? троек? наборов из k векторов? базисов?

Задача 3. Сколько элементов в $GL_N(\mathbb{F}_q)$?

Указание. Действие $GL_N(\mathbb{F}_q)$ на базисах — свободно и транзитивно.

Задача 4. Сколько элементов в $SL_N(\mathbb{F}_q)$?

Задача 5. Сколько существует k–мерных подпространств в $\mathbb{F}_q^N$?

Указание. Рассмотрите базис в каждом из подпространств. Сколькими способами его можно выбрать?

Задача 6. Сколько существует полных флагов в $\mathbb{F}_q^N$?

Указание. Воспользуйтесь тем, что $GL_N(\mathbb{F}_q)$ действует транзитивно на полных флагах. Вспомните стабилизатор этого действия.

Задача 7. Сколько существует точек в $P\mathbb{F}_q^N$? прямых в $P\mathbb{F}_q^N$? k–мерных плоскостей в $P\mathbb{F}_q^N$?

Задача 8. Опишите прямые в $P\mathbb{F}_q^2$ для $\mathbb{F}_2$ (нарисуйте граф пересечений).

Задача 9. Сколько существует прямых в аффинном пространстве $\mathbb{F}_q^N$? k–мерных плоскостей?

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.

Напомним, что квадратичная форма — выражение вида $\sum a_{ij} x_i x_j$.

Задача 10. Докажите, что если характеристика поля отлична от 2 ($1 + 1 \neq 0$), то любая квадратичная форма приводится заменой координат к диагональному виду $\sum a_{ii} x_i^2$.

Задача 11. Классифицируйте квадратичные формы с точностью до замены координат в поле $\mathbb{F}_2$, в поле $\mathbb{F}_3$.