СЕМИНАР 8(9)

Задача 1. Напишите формулу в модели Пуанкаре в полуплоскости для отражения относительно вертикальной прямой $\Re e(z) = c$, для отражения относительно прямой $\mid z \mid= 1$.

Задача 2. Как расположены неподвижные точки (включая точки на абсолюте и бесконечную точку на нем) аффинного преобразования I рода плоскости Лобачевского.

Указание. Всего четыре варианта: одна точка вне абсолюта (эллиптическое движение), одна точка на абсолюте (параболическое движение), две точки на абсолюте (гиперболическое движение), все точки (тождественное преобразование).

Задача 3. Докажите, что композиция двух симметрий относительно прямых является эллиптическим движением, если прямые пересекаются, параболическим, если они параллельны, и гиперболическим, если прямые расходятся.

Задача 4. Докажите, что преобразование II рода имеет две неподвижные точки на абсолюте. Всегда ли неподвижна прямая, их соединяющая?

Задача 5. Докажите, что

1. любое эллиптическое движение сопряжено (в модели Пуанкаре в круге) евклидовому повороту;
2. любое параболическое движение сопряжено (в модели Пуанкаре в полуплоскости) евклидовому сдвигу (вдоль границы);
3. любое гиперболическое движение сопряжено (в модели Пуанкаре в полуплоскости) евклидовому растяжению.
4. любое движение II рода сопряжено (в модели Пуанкаре в полуплоскости) преобразованию $z \to c\overline{z}$.

Задача 6. Докажите, что множество преобразований в модели Пуанкаре, сохраняющих вертикальную прямую, проходящую через точку ноль, состоит из растяжений. Опишите множество преобразований, сохраняющих произвольную прямую.

Тем самым, можно определить модель Пуанкаре *прямой Лобачевского* как луч $x \in (0, \infty)$, аффинные преобразования которого суть растяжения $x \to cx$.

Задача 7. Докажите, что функция $d(x, y) = |\ln(x/y)|$ на луче обладает всеми свойствами расстояния (аксиома измерения и откладывания отрезка) и инвариантна относительно аффинных преобразований. Докажите, что если два отрезка имеют одинаковую длину, то они совмещаются аффинным преобразованием.

Задача 8. Докажите, что отображение $x \to \ln x$ определяет изометрию прямой Лобачевского и обычной евклидовой прямой (изометрия — отображение, сохраняющее расстояния). Во что при этом переходят аффинные преобразования?

Определим расстояние в модкли Пуанкаре в полуплоскости так. Пусть $x, y \in \mathbb{C}$ — точки, l — прямая, проходящая через них, $p_1, p_2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ — точки пересечения прямой l с абсолютом. Положим

$$d(x, y) = |\ln([p_1, x, p_2, y])| = \left|\ln\left(\frac{y - p_1}{y - p_2} / \frac{x - p_1}{x - p_2}\right)\right|.$$

Задача 9. Докажите, что определенное таким образом расстояние удовлетворяет необходимым аксиомам и инвариантно относительно аффинных преобразований. Как определить расстояние в модели Пуанкаре в круге?

Задача 10. Докажите, что любое инвариантное расстояние пропорцианально построенному выше.

Преобразование $x \to \frac{x-1}{x+1}$ переводит луч $(0, \infty)$ в интервал $(-1, 1)$. Тем самым, получаем модель прямой Лобачевского на интервале.

Задача 11. Докажите, что аффинными преобразованиями в этой модели будут преобразования вида

$$x \to \frac{x + v}{xv + 1},$$

где $v \in (-1, 1)$. Как представляется в таком виде композиция двух таких преобразований?