Упражнения по гомологической алгебре к 21 февраля

1. Пусть A — коммутативное кольцо с единицей, Spec A — множество собственных (т.е. $\neq A$) простых идеалов кольца A. Для каждого $f \in A$ положим $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A,\ f \notin \mathfrak{p}\}$. Проверьте, что $D(fg) = D(f) \cap D(g)$. Введем *топологию Зариского* на Spec A, принимая множества $D(f)$ за базу открытых множеств. Докажите, что

а) $D(g) \subset D(f)$ тогда и только тогда, когда $g^n = uf$ для некоторых $n > 0, u \in A$;

б) $D(f) = \bigcup_{i=1}^k D(f_i)$ тогда и только тогда, когда существуют $b_1, \ldots, b_k \in A,\ n > 0$, для которых $f^n = b_1 f_1 + \ldots + b_k f_k$;

в) Замыкание точки $\mathfrak{p} \in$Spec A состоит из всех $\mathfrak{p}'$ с $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$; в частности, замкнутые точки отвечают максимальным идеалам.

2. Пусть $S \subset A$ — мультипликативно замкнутое подмножество (т.е. $a, b \in S \ \Rightarrow\ ab \in S$; например, $\{f^n,\ n \geq 0\}$ или $A \backslash \mathfrak{p}$ для простого идеала $\mathfrak{p}$). Локализацией $S^{-1}A$ кольца A по S называется множество классов эквивалентности дробей $a/s,\ a \in A,\ s \in S$ по соотношению $a_1/s_1 = a_2/s_2$ если найдется $b \in S$ т.ч. $b(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$. Проверьте, что естественные операции сложения и умножения дробей превращают $S^{-1}A$ в кольцо. Стандартными обозначениями для $S^{-1}A$ в примерах $S = \{f^n\}$ и $S = A \backslash \mathfrak{p}$ являются A_f и $A_{\mathfrak{p}}$. Докажите, что A_f зависит лишь от $D(f)$, а не от f.

3. Пусть $V = D(g) \subset D(f) = U$, так что $g^n = uf$ (см. задачу 1а). Зададим отображение $r_{UV} :\ A_f \to A_g$ формулой $r_{UV}(a/f^m) =$ классу au^m/g^{mn} в A_g. Докажите, что

а) r_{UV} зависит лишь от U и V, а не от f, u и g;

б) r_{UV} — гомоморфизм колец, и $r_{UU} =$id;

в) $r_{UV} r_{VW} = r_{UW}$ для $W = D(h) \subset V = D(g) \subset U = D(f)$.

4. Докажите, что на Spec A существует единственный *структурный пучок* колец $\mathcal{O}$, для которого $\Gamma(D(f), \mathcal{O}) = A_f$, а отображения ограничения $r_{D(f)D(g)}$ — такие, как в предыдущей задаче. *Указание:* сначала проверьте выполнение аксиом пучка для открытых множеств вида $D(f)$: если $D(f) = \bigcup_{i=1}^k D(f_i),\ s_i \in A_{f_i}$ и $r_{D(f_i)D(f_i f_j)}(s_i) = r_{D(f_j)D(f_i f_j)}(s_j)$, то существует единственный элемент $s \in A_f$ с $r_{D(f)D(f_i)}(s) = s_i$. После этого определите $\Gamma(U, \mathcal{O})$ для произвольного $U = \bigcup D(f_i)$ как множество классов эквивалентности согласованных наборов $\{s_i \in A_{f_i} :\ r_{D(f_i)D(f_i f_j)}(s_i) = r_{D(f_j)D(f_i f_j)}(s_j)\}$ по естественному соотношению эквивалентности, связывающему наборы $\{s_i\}$ и $\{t_j\}$ для двух различных покрытий $U = \bigcup D(f_i) = \bigcup D(g_j)$.

5. Докажите, что росток пучка $\mathcal{O}$ в точке $\mathfrak{p} \in$Spec A есть локализация $A_{\mathfrak{p}}$ (обозначение задачи 2).

6. Пусть M — A-модуль. Для мультипликативно замкнутого подмножества $S \subset A$ определим локализацию $S^{-1}M$ как множество классов эквивалентности дробей $\{m/s, m \in M, s \in S\}$ по соотношению $m_1/s_1 = m_2/s_2$ тогда и только тогда, когда $b(m_1 s_2 - m_2 s_1) = 0$ для некоторого $b \in S$. Докажите, что $S^{-1}M$ — модуль над $S^{-1}A$.

7. Докажите, что на Spec A существует единственный пучок модулей $\mathcal{M}$ над пучком колец $\mathcal{O}$, для которого $\Gamma(D(f), \mathcal{M}) = M_f$ (локализация M по множеству $\{f^n\}$), и отображения ограничения r_{UV} определяются аналогично задаче 3. Найдите росток пучка $\mathcal{M}$ в точке $\mathfrak{p} \in$Spec A. Пучки модулей вида $\mathcal{M}$ называются *квазикогерентными*.

8. Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — два квазикогерентных пучка на Spec A. Докажите, что морфизмы пучков $\mathcal{O}$-модулей $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ взаимно однозначно соответствуют гоморфизмам соответствующих A-модулей $M \to N$. Таким образом, функтор $\Gamma(\text{Spec } A, ?)$ задает эквивалентность категории квазикогерентных пучков на Spec A и категории A-модулей. В частности, функтор $\Gamma(\text{Spec } A, ?)$ на категории квазикогерентных пучков *точен* и $H^{>0}(\text{Spec } A, \mathcal{M}) = 0$.