Упражнения по гомологической алгебре к 13 марта.

1. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм локально компактных пространств. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на X. Положим для любого открытого множества $U \subset Y$: $f_!\mathcal{F}(U) = \{s \in \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{F})$ т.ч. $\mathrm{supp}(s) \xrightarrow{f} U$ собствен$\}$. (Морфизм называется собственным, если прообраз любого компакта компактен.) Докажите, что

а) $f_!\mathcal{F}$ есть подпучок в $f_*\mathcal{F}$;

б) $\mathcal{F} \mapsto f_!\mathcal{F}$ есть точный слева функтор.

2. Если Y — точка, то абелева группа $f_!\mathcal{F}$ обозначается $\Gamma_c(X, \mathcal{F})$ и называется *сечения с компактным носителем.* (В общем случае, $f_!\mathcal{F}$ называется *прямой образ с компактным носителем.*) Докажите, что слой пучка $f_!\mathcal{F}$ в точке $y \in Y$ изоморфен $\Gamma_c(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)})$.

3. Пусть $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ — точная последовательность мягких пучков на X. Докажите, что

а) Последовательность $0 \to f_!\mathcal{F} \to f_!\mathcal{G} \to f_!\mathcal{H} \to 0$ точна;

б) Пучок $f_!\mathcal{F}$ мягкий.

4. Заменяя произвольный пучок $\mathcal{F}$ на его мягкую резольвенту, можно теперь определить *высшие прямые образы с компактным носителем* $R^i f_!\mathcal{F}$; в частности, если Y — точка, абелева группа $R^i f_!\mathcal{F}$ обозначается $H^i_c(X, \mathcal{F})$ и называется *когомологии с компактным носителем.* Докажите, что

а) Слой пучка $R^i f_!\mathcal{F}$ в точке $y \in Y$ изоморфен $H^i_c(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)})$;

б) Для $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ имеем $R(gf)_! = Rg_! \circ Rf_!$.

5. Пусть $f: X \to Y$ собственно, а $j: U \hookrightarrow X$ открыто. Докажите, что $R(fj)_! = Rf_! \circ j_!$.

6. Пусть Y — замкнутое подмножество X, а $U = X - Y$. Докажите, что имеется точная последовательность

$$\ldots \to H^n_c(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_n} H^n_c(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\beta_n} H^n_c(Y, \mathcal{F}) \to H^{n+1}_c(U, \mathcal{F}) \to \ldots$$

где α_n индуцировано отображением $\alpha_0: \Gamma_c(U, \mathcal{F}) \to \Gamma_c(X, \mathcal{F})$ (продолжение нулем), а β_n индуцировано ограничением сечений $\beta_0: \Gamma_c(X, \mathcal{F}) \to \Gamma_c(Y, \mathcal{F})$. *Указание*: проверьте, что если $\mathcal{F}$ — мягкий пучок, то последовательность

$$0 \to \Gamma_c(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_0} \Gamma_c(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\beta_0} \Gamma_c(Y, \mathcal{F}) \to 0$$

точна, и используйте мягкие резольвенты для вычисления H^n_c.

7. Докажите, что пучок $\mathcal{F}$ на X является мягким тогда и только тогда, когда $H^1_c(U, \mathcal{F}) = 0$ для всех открытых $U \subset X$.

8. Для мягкого пучка $\mathcal{F}$ на X определим предпучок $\mathcal{F}^*$ с сечениями $\mathcal{F}^*(U) = \Gamma_c(U, \mathcal{F})^*$. Докажите, что $\mathcal{F}^*$ — пучок.

9. Пусть X является объединением двух замкнутых подмножеств $i_{1,2}: X_{1,2} \hookrightarrow X$. Пусть i обозначает замкнутое вложение $X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X$. Докажите точность последовательности

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} i_{1*}i_1^{-1}\mathcal{F} \oplus i_{2*}i_2^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{\beta} i_*i^{-1}\mathcal{F} \to 0$$

где α есть сумма двух естественных морфизмов (из сопряженности прямого и обратного образа), а β есть разность двух естественных морфизмов. Применяя ее к подходящей резольвенте пучка $\mathcal{G}$ на X, постройте длинную точную последовательность *Майера-Виеториса*

$$\ldots \to H^{n-1}(X_1 \cap X_2, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X_1, \mathcal{F}) \oplus H^n(X_2, \mathcal{F}) \to H^n(X_1 \cap X_2, \mathcal{F}) \to \ldots$$

Постройте аналогичную точную последовательность для $H_c^\bullet$ вместо $H^\bullet$.