Упражнения по гомологической алгебре к 20 марта

Все пространства предполагаются локально компактными, паракомпактными и имеющими конечную размерность $\dim_c$. Ограниченная слева (справа) производная категория пучков абелевых групп (или, если угодно, $\mathbf{R}$-векторных пространств) на X обозначается $D^+(X)$ (соотв. $D^-(X)$). В этом листочке перечисляются некоторые связи между *шестью операциями*: $f^{-1}, f_*, f_!, f^!, \overset{L}{\otimes}, \mathcal{H}om$.

1. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in D^-(Y)$. Докажите, что $f^{-1}(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}) = f^{-1}\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} f^{-1}\mathcal{G}$. *Указание*: замените $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ на их плоские резольвенты и проверьте равенство слоев.

2. Пусть, в дополнение к данным Задачи 1, $\mathcal{H} \in D^+(Y)$. Докажите, что $\mathcal{H}om(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{H}))$. *Указание*: замените $\mathcal{G}$ на плоскую резольвенту, а $\mathcal{H}$ на инъективную резольвенту.

3. Пусть, в дополнение к данным Задачи 1, $\mathcal{K} \in D^+(X)$. Докажите, что $f_*\mathcal{H}om(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{K}) = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, f_*\mathcal{K})$. *Указание*: замените $\mathcal{K}$ на инъективную резольвенту; тогда $f_*\mathcal{K}$ состоит из инъективных пучков, а $\mathcal{H}om(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{K})$ состоит из мягких пучков. Теперь примените сопряженность f^{-1} и f_*.

4. Пусть задан декартов квадрат (т.е. X' является расслоенным произведением X и Y' над Y)

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

Тогда для $\mathcal{K} \in D^+(X)$ имеем $q^{-1}f_!\mathcal{K} = g_!p^{-1}\mathcal{K}$, $g_*p^!\mathcal{K} = q^!f_*\mathcal{K}$ (*Формула замены базы*). *Указание*: замените $\mathcal{K}$ на мягкую резольвенту и проверьте равенство $q^{-1}f_!\mathcal{K} = g_!p^{-1}\mathcal{K}$, вычисляя слои в точке $y' \in Y'$. Для вывода второго равенства поменяйте местами X и Y', примените первое равенство и сопряженность пар функторов (f^{-1}, f_*); (g^{-1}, g_*); $(q_!, q^!)$; $(p_!, p^!)$.

5. Для $\mathcal{K} \in D^+(X)$, $\mathcal{G} \in D^-(Y)$ имеем $f_!(\mathcal{K} \overset{L}{\otimes} f^{-1}\mathcal{G}) = f_!\mathcal{K} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}$ (*Формула проекции*). *Указание*: замените $\mathcal{K}$ на мягкую резольвенту, а $\mathcal{G}$ — на плоскую.

6. Для $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in D^+(Y)$ имеем $f^!\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{H}om(f^{-1}\mathcal{F}, f^!\mathcal{G})$. *Указание*: замените $\mathcal{F}$ на мягкую резольвенту, а $\mathcal{G}$ — на инъективную, и используйте явную конструкцию $f^!$.

7. Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое вложение. Докажите, что функтор $f_* = f_!$ из абелевой категории пучков на X в абелеву категорию пучков на Y имеет правый сопряженный функтор γ_X *сечений с носителем на* X: если $V \subset Y$ открыто, и $U = X \cap V$, то $\Gamma(U, \gamma_X\mathcal{F}) = \{s \in \Gamma(V, \mathcal{F}) : \mathrm{supp}(s) \subset X\}$. Проверьте, что γ_X точен слева и $f^! = R\gamma_X$.

8. Пусть $f: 0 \to \mathbf{R}^n$ — вложение точки. Вычислите $f^!\underline{\mathbf{R}}$.