Упражнения по гомологической алгебре к 27 марта

1. Пусть $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ — градуированное кольцо; $S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$. По определению, Proj S — это множество однородных простых идеалов $S_+ \not\supset \mathfrak{p} \subset S$. Для однородного элемента $f \in S_+$ положим $D_f = \{\mathfrak{p} : f \notin \mathfrak{p}\} \subset$Proj S. Положим $S_{(f)} \subset S_f$ — подкольцо элементов степени 0 в локализации кольца S (см. первый листочек). Докажите, что

а) $D_f \simeq$Spec $S_{(f)}$;

б) Ограничение структурного пучка Spec $S_{(f)}$ на $D_f \cap D_g$ изоморфно ограничению структурного пучка Spec $S_{(g)}$ на $D_f \cap D_g$;

в) Множества D_f задают базис открытых множеств *топологии Зариского* на Proj S, а структурные пучки на Spec $S_{(f)}$ склеиваются в *структурный пучок* $\mathcal{O}$ на Proj S. Для $\mathfrak{p} \in$Proj S слой $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ изоморфен подкольцу $S_{(\mathfrak{p})}$ элементов степени нуль в локализации $S_\mathfrak{p}$. Таким образом, (Proj $S, \mathcal{O}$) является схемой.

2. Докажите, что Proj $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ изоморфен $\mathbf{P}^n$ (например, покрывается стандартными аффинными картами со стандартными склейками).

3. Пусть M — градуированный S-модуль. Для однородного $f \in S_+$ определим $M_{(f)}$ как множество элементов степени нуль в локализации M_f; для $\mathfrak{p} \in$Proj S аналогично определим $M_{(\mathfrak{p})} \subset M_\mathfrak{p}$ (см. первый листочек). Докажите, что

а) Пучки $\mathcal{O}$-модулей $\mathcal{M}_{(f)}$ на D_f =Spec $S_{(f)}$ склеиваются в пучок $\mathcal{M}$ — *локализацию* M;

б) Слой $\mathcal{M}_\mathfrak{p}$ изоморфен $M_{(\mathfrak{p})}$;

в) Пучок $\mathcal{M}$ квазикогерентен, а если S нетерово, и M конечно порожден, то $\mathcal{M}$ когерентен.

4. Напомним, что $S\langle n\rangle$ — это свободный S-модуль ранга 1 с образующей в степени $-n$. Определим пучок $\mathcal{O}(n)$ на Proj S как локализацию модуля $S\langle n\rangle$. Для произвольного квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на Proj S положим $\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_\mathcal{O} \mathcal{O}(n)$. Пусть, наконец, S порождается над S_0 своей компонентой первой степени S_1. Докажите, что

а) Пучок $\mathcal{O}(n)$ локально свободен ранга 1 на Proj S;

б) Если $S = \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$, то $\mathcal{O}(n)$ — тот самый пучок на $\mathbf{P}^n$, который обычно так и называется;

в) Для любого градуированного S-модуля M локализация $M\langle n\rangle$ (тот же модуль со сдвигом градуировки) изоморфна $\mathcal{M}(n)$; в частности, $\mathcal{O}(n) \otimes_\mathcal{O} \mathcal{O}(m) \simeq \mathcal{O}(n+m)$.

5. Для квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на Proj S определим $\Gamma_*(\mathcal{F}) := \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{F}(n))$ со следующей структурой (градуированного) S-модуля. Каждый элемент $s \in S_d$ определяет сечение $s \in \Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{O}(d))$, и для любого $t \in \Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{F}(n))$ определим $s \cdot t \in \Gamma(\text{Proj } S, \mathcal{F}(n+d))$ как произведение сечений $s \otimes t$ с учетом отождествления $\mathcal{O}(d) \otimes_\mathcal{O} \mathcal{F}(n) = \mathcal{F}(n+d)$. Докажите, что если $S = \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$, то $\Gamma_*(\mathcal{O}) = S$;

6. С этих пор предполагается, что S — нетерово кольцо, порожденное S_1 над S_0. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на Proj S. Постройте изоморфизм β между $\mathcal{F}$ и локализацией S-модуля $\Gamma_*(\mathcal{F})$.

7. Пусть M — градуированный S-модуль. Постройте гомоморфизм $\alpha : M \to \Gamma_*(\mathcal{M})$.

8. Пусть M конечно порожден. Докажите, что в достаточно большой степени α является изоморфизмом, т.е. найдется N т.ч. для $d \geq N$ отображение $\alpha_d : \ M_d \to \Gamma(\mathrm{Proj}\ S, \mathcal{M}(d))$ является изоморфизмом.

9. Определим отношение эквивалентности на множестве градуированных S-модулей, полагая $M \equiv N$, если найдется N т.ч. для $d \geq N$ имеем $M_d = N_d$. Докажите, что функторы $M \to \mathcal{M}$ и $\mathcal{F} \to \Gamma_*(\mathcal{F})$ задают взаимно обратные эквивалентности категории когерентных пучков на Proj S и категории конечно порожденных градуированных S-модулей по модулю отношения эквивалентности $\equiv$.