Упражнения по гомологической алгебре к 3 апреля

Цель задач 1-6 — построить p-адические числа $\mathbf{Z}_p$ не как проективный предел $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, а в терминах конечного поля $\mathbf{F}_p$ (*векторы Витта* $W(\mathbf{F}_p)$), т.е. как будто бы мы родились в мире характеристики p.

1. Пусть $x_1, x_2, \dots$ — независимые переменные. Для $n \geq 1$ положим $x^{(n)} = \sum_{d|n} d x_d^{n/d}$. Докажите, что x_n можно выразить через $x^{(d)}$, $d|n$, с рациональными коэффициентами. Мы полагаем $x := (x_1, x_2, \dots) = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ и называем x_i *координатами Витта вектора* x, а $x^{(i)}$ — *призрачными координатами вектора* x.

2. Рассмотрим производящую функцию $f_x(t) = \prod_{n\geq 1}(1 - x_n t^n)$. Докажите, что $-t\frac{d}{dt}\log f_x(t) = \sum_{n\geq 1} x^{(n)} t^n$.

3. Определим кольцевую структуру на множестве векторов Витта покомпонентно в призрачных координатах. Докажите, что

а) $f_x(t) f_y(t) = f_{x+y}(t)$, а стало быть, $(x+y)_n$ является многочленом с целыми коэффициентами от $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$;

б) $\prod_{d,e\geq 1}(1 - x_d^{m/d} y_e^{m/e} t^m)^{de/m} = f_{xy}(t)$, где m — наименьшее общее кратное d и e. Таким образом, $(xy)_n$ является многочленом с целыми коэффициентами от $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$;

в) Для простого числа p формулы, выражающие координаты $(x+y)_{p^n}, (xy)_{p^n}$, включают только координаты x_{p^k}, y_{p^k}, $0 \leq k \leq n$;

г) Напишите явные формулы для $(x+y)_p, (x+y)_{p^2}, (xy)_p, (xy)_{p^2}$.

4. Пусть A — кольцо (коммутативное с единицей). Тогда можно считать, что $x_i \in A$ (вместо независимых переменных берутся числа из A). Формулы предыдущей задачи задают кольцевую структуру на множестве векторов Витта $W(A)$. Очевидно, всякому гомоморфизму $A \to B$ отвечает гомоморфизм $W(A) \to W(B)$. Если A — кольцо характеристики p, то мы будем рассматривать только векторы Витта, у которых ненулевые координаты имеют номер p^n, $n \geq 0$ (они образуют подкольцо согласно 3в), и обозначать их тоже $W(A)$. Саму координату x_{p^n} мы будем теперь обозначать x_n (в частности, старая x_1 теперь будет x_0); то же относится и к призрачным координатам. Определим два оператора (сдвиг и Фробениус): $Vx = (0, x_0, x_1, \dots)$; $Fx = (x_0^p, x_1^p, \dots)$. Докажите, что а) $(Vx)^{(n)} = px^{(n-1)}$; б) $x^{(n)} = (Fx)^{(n-1)} + p^n x_n$; в) $x^{(n)} = x_0^{p^n} + p x_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n x_n$; г) $VFx = FVx = px$; д) $(V^i x)(V^j y) = V^{i+j}(F^j x F^i y)$.

Для $a \in A$ положим $\{a\} := (a, 0, 0, \dots)$. Тогда $x = \sum_{i=0}^{\infty} V^i\{x_i\}$.

5. Пусть $A = \mathsf{k}$ — поле характеристики p. Докажите, что $x \in W(\mathsf{k})$ обратимо тогда и только тогда, когда $x_0 \neq 0$. *Указание:* $1 - x\{x_0\}^{-1} = Vy$; $x\{x_0^{-1}\}\sum_0^{\infty}(Vy)^i = (1 - Vy)\sum_0^{\infty}(Vy)^i = 1$.

6. а) Докажите, что $V^n W(A)$ является идеалом кольца $W(A)$. Факторкольцо обозначается $W_n(A)$ (*урезанные векторы Витта*);

б) Докажите, что $W_n(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$; $W(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}_p$;

в) Докажите, что $W(\mathbf{F}_{p^l})$ является кольцом целых неразветвленного расширения $\mathbf{Q}_p$ степени l.

Цель следующих задач — определить пучки дифференциальных форм на произвольных схемах. Пусть $f: A \to B$ — гомоморфизм колец, а M — B-модуль. Отображение $d: B \to M$ называется A-*дифференцированием*, если

$d(b_1+b_2) = db_1 + db_2$; $d(b_1 b_2) = b_1 db_2 + b_2 db_1$; $df(a) = 0$ (в частности, d является гомоморфизмом A-модулей). Пример: пусть $g: B\otimes_A B \to B$ — гомоморфизм колец, заданный формулой $g(b_1\otimes b_2) = b_1 b_2$. Положим $I :=\mathrm{Ker}(g)$ — это B-модуль относительно умножения слева; I/I^2 тоже является B-модулем. Определим $d: B \to I/I^2$, $db := 1\otimes b - b\otimes 1 \pmod{I^2}$.

7. Докажите, что $(I/I^2, d)$ универсально, т.е. всякое A-дифференцирование $d': B\to M$ разлагается в композицию $d: B\to I/I^2$ и гомоморфизма B-модулей $h: I/I^2 \to M$. Универсальный модуль I/I^2 будет обозначаться $\Omega^1_{B/A}$.

8. Пусть $B = A[x_1,\ldots,x_n]$. Докажите, что $\Omega^1_{B/A}$ является свободным B-модулем с образующими $dx_1,\ldots,dx_n$.

9. а) Пусть $f': A\to A'$ — гомоморфизм колец, и $B' := B\otimes_A A'$. Докажите, что $\Omega^1_{B'/A'} = \Omega^1_{B/A}\otimes_B B'$;

б) Пусть S — мультипликативная система в B. Докажите, что $\Omega^1_{S^{-1}B/A} = S^{-1}\Omega^1_{B/A}$.

Пусть теперь $f: X\to Y$ — морфизм схем. Можно покрыть Y открытыми аффинными подмножествами $U_i =\mathrm{Spec}\ A_i$, а теперь покрыть $f^{-1}U_i$ открытыми аффинными подмножествами $V_j =\mathrm{Spec}\ B_j$. Локализация B_j-модуля $\Omega^1_{B_j/A_i}$ является (квази)когерентным пучком $\Omega^1_{V_j/U_i}$ $\mathcal{O}_{V_j}$-модулей. Согласно предыдущей задаче, эти пучки склеиваются в (квази)когерентный пучок $\Omega_{X/Y}$ $\mathcal{O}_X$-модулей. Согласно задаче 7, этот пучок можно описать следующим образом, не прибегая к покрытиям. Пусть $\Delta: X\hookrightarrow X\times_Y X$ — диагональное вложение, и $\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_{X\times_Y X}$ — пучок идеалов диагонали. Тогда $\Omega^1_{X/Y} = \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$.

10. а) Пусть $A\to B\to C$ — гомоморфизмы колец. Докажите, что следующая последовательность C-модулей точна: $\Omega^1_{B/A}\otimes_B C\to\Omega^1_{C/A}\to\Omega^1_{C/B}\to 0$;

б) Пусть $X\xrightarrow{f} Y\xrightarrow{g} Z$ — морфизмы схем. Докажите, что следующая последовательность $\mathcal{O}_X$-модулей точна: $f^*\Omega^1_{Y/Z}\to\Omega^1_{X/Z}\to\Omega^1_{X/Y}\to 0$.

11. а) Пусть $I\subset B$ — идеал; $C := B/I$. Докажите, что следующая последовательность C-модулей точна: $I/I^2\xrightarrow{\delta}\Omega^1_{B/A}\otimes_B C\to\Omega^1_{C/A}\to 0$.

Здесь для $b\in I$ т.ч. $\bar b = b \pmod{I^2}$ мы полагаем $\delta\bar b := db\otimes 1$ — это C-линейное отображение C-модулей;

б) Пусть $f: X\to Y$ — морфизм схем, и $Z\subset X$ — замкнутая подсхема, заданная пучком идеалов $\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_X$. Докажите, что следующая последовательность $\mathcal{O}_Z$-модулей точна: $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2\xrightarrow{\delta}\Omega^1_{X/Y}\otimes\mathcal{O}_Z\to\Omega^1_{Z/Y}\to 0$.

12. Пусть B — локальное кольцо, содержащее поле k, изоморфное его полю вычетов $B/\mathfrak{m}$. Тогда отображение $\delta: \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to\Omega^1_{B/\mathsf{k}}\otimes_B\mathsf{k}$ из предыдущей задачи является изоморфизмом.

Если X — гладкое n-мерное многообразие над полем k, для любой точки $x\in X$ размерность $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ над полем вычетов $\mathsf{k}(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ равна n. Согласно известному численному критерию, пучок $\Omega^1_{X/Spec\mathsf{k}}$ является локально свободным, и мы определяем $\Omega^i_X = \Lambda^i_{\mathcal{O}_X}\Omega^1_{X/Spec\mathsf{k}}$.